ASTHANA KOLAHALAM

Critically Edited By

THIRUMALAI SREE SAILA SARMA

Government Oriental Manuscripts Library, Madras.

1951

PRICE Rs. 5—0—0

PRINTED AT THE
SOLAR WORKS, MADRAS-1.

INTRODUCTION

The Government of Madras took up for consideration the question of publication of the various manuscripts in different languages on subjects like Philosophy, Medicine, Science, etc., early in May, 1948. Important Manuscripts Libraries in the Madras Presidency were requested to send a list of unpublished manuscripts with them for favour of being considered by the Government for publication. The Honorary Secretary of the Tanjore Maharaja Serfoji's Sarasvathi Mahal Library, Tanjore, alone complied with this request. This list as well as a similar list of unpublished manuscripts in the Government Oriental Manuscripts Library, Madras, were carefully examined and a tentative selection of manuscripts suitable for publication was made. The Government in their Memorandum No. 34913/48-10, Education, dated 4-4-1949, constituted an Expert Committee with the Curator of the Government Oriental Manuscripts Library, Madras, as the Secretary, for the final selection of manuscripts suitable for printing and for estimating the cost of publication.

The following are the members of the Committee :—

1. Sri T. M. Narayanaswami Pillai, M.A., B.L.
2. ,, R. P. Sethu Pillai, B.A., B.L.
3. ,, C. M. Ramachandra Chettiar, B.A., B.L.
4. ,, R. Krishnamoorthy, (Kalki).
5. Dr. N. Venkataramanayya, M.A., Ph.D.
6. Sri M. Ramanuja Rao Naidu, M.A.
7. ,, V. Prabhakara Sastri.
8. ,, N. Venkata Rao.
9. ,, H. Sesha Ayyangar.
10. ,, Masthi Venkatesa Ayengar.
11. ,, M. Mariappa Bhat, M.A., L.T.
12. Dr. C. Achyuta Menon, B.A., Ph.D.
13. ,, C. Kunhan Raja, M.A., D.Phil.
14. ,, A. Sankaran, M.A., Ph.D., L.T.
15. ,, P. Rama Sastri.
16. ,, S. K. Ramanatha Sastri.
17. Dr. M. Abdul Haq, M.A., D.Phil., (Oxon.)
18. Afzul-ul-Ulama Hakim Khader Ahamed.

19. Sri P. D. Joshi.
20. ,, S. Gopalan, B,A , B.L.
21. ,, T. Chandrasekharan, M.A., L.T.

With the exception of Sri Masthi Venkatesa Iyengar, Dr. C. Kunhan Raja, the above members continued to be members of the Expert Committee for 1950-51 also to which the following gentlemen were included in Govt. Memo. No. 7297-E/50-3. Edn , dated 19-5-1950 and Govt. Memo. No. 15875-E/50-4. Edn., dated 7-9-1950.

1. Dr. A. Chidambaranath Chettiar, M.A, Ph. D.
2. Sri S. Govindarajulu, B.A , B.L , LL.B., Bar-at-Law,
3. Capt. G. Srinivasamoorthy, B.A., B.L., M,B., & C.M.
4. Dr. Muhammed Hussain Nainar, M.A., Ph. D.,
5. Sri T. V. Subba Rao, B.A., B.L.,
6. Principal, College of Indian Medicine, Madras.

The members of the Committee formed into Sub-Committees for the various languages, Sanskrit, Tamil, Telugu, Kannada, Malayalam, Mahrathi and Islamic Languages. They met during the month of May, 1949, at Madras and at Tanjore to examine the manuscripts and make a selection. The recommendations of the Committee were accepted by the Government and they have decided to call these publications as the "MADRAS GOVERNMENT ORIENTAL SERIES," and appointed the Curator, Government Oriental Manuscripts Library, Madras, as the General Editor of the publications.

The following manuscripts were taken up for publication during 1949—50

"A" From the Government Oriental Manuscripts Library, Madras

TAMIL

1. KAPPAL SATTIRAM.
2. ANUBHAVA VAIDYA MURAI.
3. ATTANAKOLAHALAM.
4. UPADESA KANDAM.
5. COLAN PURVA PATTAYAM.
6. KONGA DESA RAJAKKAL
7. SIVAJNANA DIPAM.

TELUGU

1. AUSADA YOGAMULU.
2. VAIDYA NIGHANTU.
3. DHANURVIDYA VILASAMU.
4. YOGA DARSANA VISAYAMU.
5. KHADGA LAKSANA SIROMANI.

SANSKRIT

1. VISANARAYANIYAM.
2. BHARGAVA NADIKA.
3. HARIHARACATURANGAM.
4. BRAHMASUTRAVRTTI MITAKSARA.
5. NYAYASIDDHANTA TATVAMRTAM.

MALAYALAM

1. GARBHA CIKITSA.
2. a. VASTULAKSANAM.
   b. SILPAVISAYAM
3. MAHASARAM.
4. KANAKKUSARAM.
5. KRIYAKRAMAM,
6. KANAKKUSARAM—BALAPRABODHAM.

KANNADA

1. LOKOPAKARA.
2. RATTAMATA.
3. ASVASASTRAM.
4. VIVIDHA VAIDYA VISHAYAGALU
5. SANGITARATNAKARA
6. SUPASASTRA.

ISLAMIC LANGUAGES

1. JAMIL—AL—ASHYA.
2. TIBB—E—FARIDI.
3. TAHQIQ—AL—BUHRAN.
4. SAFINAT—AL—NAJAT.

"B" From the Tanjore Maharaja Serfoji's Sarasvathi Mahal Library, Tanjore.

TAMIL

1. SARABENDRAVAIDYA MURAI. (Diabetes).
2. Do. (Eyes).
3. AGASTIYAR
4. KONKANARSARAKKU VAIPPU.
5. TIRUCHITRAMBALAKKOVAIYAR with Padvurai.
6. KALACAKRAM.
7. TALASAMUDRAM.

8. BHARATANATYAM.
9. a. PANDIKELI VILASAM NATAKAM.
   b. PURURAVA CAKRAVARTI NATAKAM.
   c. MADANA SUNDARA VILASA NATAKAM.
   d. PERCY MACQUEEN'S COLLECTION in the Madras University Library on Folklore.
10. RAMAYAN AMMANAI.
11. TAMIL PADALKAL including Pattinattar Venba and Vannankal.

TELUGU

1. KAMANDAKANITISARAMU.
2. TALADASAPRANAPRADIPIKA.
3. a. RAGHUNATHA NAYAKA ABHYUDAYAMU.
   b. RAJAGOPALA VILASAMU
4. RAMAYANAMU by Katta Varadaraju.

MAHRATHI

1. NATYASASTRA SANGRHA.
2. a. BOOK OF KNOWLEDGE.
   b. FOLK SONGS.
   c. DORA DARUN VENI PADDHATI
   d. ASVASA CATULA DUMANI.
3. a. PRATAPASIMHENDRA VIJAYA PRABANDHA.
   b. SARABHENDRA THIRTHAVALI
   c. LAVANI.
4. DEVENDRA KURAVANJI
5. BHAKTA VILASA.
6. SLOKA BADDHA RAMAYANA.

SANSKRIT

1. ASVASASTRA with Tricolour illustrations.
2. RAJAMRGANKA.
3. CIKITSAMRTASAGARA.
4. AYURVEDAMAHODADHI.
5. GITA GOVINDA ABHINAYA.
6. a. COLACAMPU.
   b. SAHENDRA VILASA.
7. DHARMAKUTAM—Sundara Kanda.
8. JATAKASARA.
9. VISNUTATTVANIRNAYA VYAKHYA
10. SANGITA DARPANA
11. BIJAPALLAVA

During 1950, only the Sub-Committees for Tamil, Telugu and Kannada met in the month of July 1950 at Madras. The following books were taken up for publication in the various languages in 1950-51.

TAMIL

1. DAKSHINAMURTHY-VAIDYA ATTAVANAI ... Medicine
2. VISVAMITRAVYAKHYA. ... „
3. ANUBHAVAVAIDYAM. ... „

TELUGU

1. SAIVACARASANGRAHAMU. .. Philosophy
2. AUSADAYOGAMULU. ... Medicine
3. ABHINAYADARPANAMU. ... Dance

SANSKRIT

1. AROGYACINTAMANI. ... Medicine
2. TATVASARA with Ratnasarini. Philosophy
3. SUTRARTHAMRTA LAHARI. ... „

MALAYALAM

1 ASVACIKITSA. ... Medicine
2 PALASARASAMUCCAYA. ... Astrology

KANNADA

1. VAIDYA SARA SANGRAHA ... Medicine

It is hoped that the publication of most of the important manuscripts will be cempleted within the next four years.

Some of the manuscripts taken up for publication are represented by single copies in the Library and consequently the mistakes that are found in them could not be corrected by comparing them with other copies. The editors have, however, tried their best to suggest correct readings. The wrong readings are given in round brackets and correct readings have been suggested in square brackets. When different readings are found, they have been given in the footnotes except in the case of a few books in which the correct readings have been given in the footnote or incorporated in the text itself.

The Government of Madras have to be thanked for financing the entire scheme of publication although there is a drive for economy in all the departments. My thanks are due to the members of the Expert Committee who spared no pains in selecting the manuscripts for publication.

I have also to thank the various editors, who are experts in their own field, for readily consenting to edit the manuscripts and see them through the Press. The various Presses that have co-operated in printing the manuscripts in the best manner possible also deserve my thanks for the patience exhibited by them in carrying out the corrections made in the proofs.

The present edition is based on the single palm-leaf manuscript presented to Govt. Oriental Manuscripts Library in 1921-22 by Mr. Sankaravenkataramayyangar of Periyakulam. This Manuscript has been described under R. No. 507. The size of the manuscript is 16½ x 1 5/8 inches. This contains 84 pages having 6 lines on a page. This is a treatise on Mathematics calculations in Tamil in this country are of a special nature having separate symbols for various fractions. People knowing these symbols are very few. Hence I had much difficulty in getting this book edited by a competent person, who knows both ancient modern methods of calculation. The same difficulty was experienced by me in getting a printer. Only two presses were prepared to take up this work as it involved the special casting of a number of symbols peculiar to Tamil Arithmetic.

The Solar Works, though they refused to take up the work in the beginning, finally consented to print the work at a comparatively moderate rate, and have completed the work in the best manner possible.

The Editor has added his own explanation and has drawn various figures that are printed in this work. The Original Text as found in the manuscript is printed with a slight indent, having a small margin on the left. It is regretted that the Editor was not able to write an introduction to the work due to various causes.

Reference is to be made to the good work done by Sri V. R. Kalyanasundaram, Pandit of this Library for going through the proof.

Govt. Oriental Manuscripts Library, Madras.

T. CHANDRASEKHARAN,
General Editor,
Madras Govt. Oriental Series.

ஆஸ்தான கோலாஹலம்

முன்னூற்கணக்கால் மொழிந்தவை தன்னை
என்னால் திவிளியென்ற மரியாதி
சின்னூற்கணக்காய்த்திரட்டி யக்கணக்கும்
நன்னூல் வர்முன் நயந்துரைப்பேனே "(1)"

நாலாகலை நிபுணர் மிக்கான குணசீலர் நல்லறிவுள்ளோர்கள்
மேலான யெக்கணக்கும்தான் வகையுள்ளதெல்லாம் விளம்பீரி [தென்ன
பாலானவாரிதனிற் பிறந்த மிர்தம்போலும் பண்பாகுமாஸ்தான
கோலாகலமென்னும் பேர்வகுத்து மாப்பாரறியக் கூறினேனே (2)

கூடலில் நாகன் குணம் ஓர்வளித்த
ஆவர்தாரின ஞவிலிப்பெருமாள்,
பாடலைப் பாணர்பாதம் பணிவோன்
நாடவர் நகைக்க நயந்துரைப்பேனே (3)

ஆஸ்தான கோலாகலச் சுருக்கம் வருமாறு:—

"எண்ணும் எழுத்துங் கண்ணெனத்தகும்;; என்றவ்வை சொன்றற் போலும்; "பொன்றென்று பணிபல; வென்றூர் போலும் சகலமான கணக்கும் எண்சுவடி என்னுமதாய்ப் பள்ளிக்கூடம் விட்டுக்கணக்கு எழுதப் போன உடனே எண்சுவடி மறந்து தடுமாறுகிற பேரும் உண்டு. யுக்திகாரன் தினை விட்டுக் கொண்டு கேட்ட வகைக்கெல்லாம் தடுமாற்ற மில்லாமல் சொல்லுகிற பேருமுண்டு.

இந்தச் சுருக்கம் கத்திருந்து வகைவந்தால் யுக்திகாரனுக்கு எந்த உரையிலே எழுதினாலும் நாலு கணக்குப் பிள்ளைகளுக்கு முன் கேட்டவகை சரிக் கட்டிச் சொல்லும் பேருண்டாக்கி வைக்குமாகையாலே இந்தச் சுருக்கம் அங்கத்தால் (எண்களால்) மந்தனை இருங்கிற பேரும், யுக்திகாரனை இருக்கிறபேரும், கேட்ட வகை சொல்லவல்லவனை இருப்பான். யுக்திக் காராயிருக்கிற பேர் கற்றூல், பொற்பூவில் வாஸனை பிறந்தார்போல் எண்ணப்பட்டதாக, ஆயிறத்திலொருவனென்று சொல்லயிடமாயிருக்கும். மத்த அதிகாரம் விரிவிட்டுச் சொல்லி வைத்தபடியினாலே ஒன்றும் வந்து ஒன்றும் வாராமலுமாக விருக்கும். (என்றால் உதாரணத்தில் வந்தவைகள் சிலவும், வாராதவைகள் சிலவுமாக இருக்குமாகையால் முக்கியமாய்க் கவனிக்கவேண்டிய வகைகள் யாவும் பொது வழியிலேயே என்பது அவசியம் உணரத்தக்கதாம்)

அந்தக் கணக்கதிகாரங்களை குருவாக எண்ணிச் சுருக்கமாக எந்த வகைக் கணக்கிலும் குறுக்கமாக அளக்கப்பட்டதும், எண்ணிக் கைப்பட்டதும், உள்வட்டம், பிரவட்டம், முத்துகை, விகற்பக்கடைதலை, விலப்பூட்டு, சேவித்தான் கணக்கு, நிலத்தீர்வை, பணவரிசை, நெல் வரிசை, கொள்ளுகிற வகை, விற்கிறவகை ; நிலமளவு, காலளவு, (கால அளவு) குளவெட்டு, மரக்காலவியன், நெல்லுக்குத்த-விடுகின்றது, ஐவகை விகற்பம், ஏ(ளு)ழுவகை விகற்பம், ஒன்பது துகை விகற்பம், பதினொரு தொகை விகற்பம் அப்பாலுமிப்படிப் பேரிட்டு வந்த விகற்ப (விகற்பம் என்றால் வேற்றுமை என்பது பொருள்) க் கணக் கெல்லாம் சுருக்கமாகச் சொல்லுகிறேன்.

அது எப்படியென்னில் :— விரித்துக்காட்டல் :— முத்துகையாக வந்த வகைக்கெல்லாம் நடுவுங்கடையும் பெருக்கி முதலுக்குக் கொடுத்து ஒரு தனிப்பேர் சொல்லுகிற இனமுண்டு. (1).

கடைதலைவி(யி)ல் முட்டாக முதலுங்கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக் கொடுத்து ஒரு தனிப்பேர் சொல்லுகிற இனமுண்டு. (2).

முத்து கையில் வந்த இனம் கடைசியில் வந்தால் நடுவுங்கடையும் பெருக்கி முதலுக்குக் கொடுத்தால் அதுவே தீர்வை (3).

நடுவும் கடைசியில் முதலுங்கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக் கொடுத்து ஒருவன் (ஒன்றின்) பேர் சொல்லுவது. (4).

அய்ந்துகை விகற்பத்துக்கு :— முன்(னி)னரையைப் பெருக்கி நிறுத்திப் பின்னரையு மந்தப்படியே பெருக்கி இதை முன் துகைத்தீருவைப் போல் நடுவுங்கடையும் பெருக்கிக் கண்டது, நிருத்தின துகைக்குக் குடுத்தது அதுவே (அதனீவையே) தீருவையாகச் சொல்லவும் (5).

இப்படிப் போலவே :— ஐந்துகை, ஏழுதுகை, ஒன்பது துகை பதினொரு துகை, (ஆக) வந்த (துக்கெல்லாம்) தற்கெல்லாம் இப்படிக்கண்டு சொல்லவும்.

இங்குள்ள சொல்லப்பட்ட கணக்கெல்லாம் தீபரமாகச் சொல்லுகிறதற்கு வகை விபரம்.

குணமாராட்டமாக வருகிற கணக்கும் பரத்திலே, இனத்திலே விரித்துக் காட்டல் :— திவாகரம், உருச்சொலக்கவிச் சொன்னப்போதும், அப்படிக் கேட்ட கணக்கெல்லாம் சுருக்கமாகச் சொல்ல பந்துக்கட்டு பெருக்குகிர வகை யறிய நினவு :—

ம௱ம௱ குழியெத்தனை யென்றால் குழி-ள-ஆமே. அதற்குஸ்தானம்-ம-௱ (க்கு) ஸ்தானம் க. ம ; ஆ (ஆகஸ்தானம்) உ. மத்தய-ம-௱த்தானம் உ. ஆ த்தானம்-ச-௱-க-தள்ளி நின்ற ஸ்தானம் ௩-(3) ; ஆகையால் நூறுக்குத்

தானம்-ரு-இதற்கு ஒன்று முதல் [ரு (ஸ்தானம்) மட்டும்] நடத்த-க-ய-ா; (இதன் விவரணம் யாதெனில் லக்க விவரப்பட்டியில் கண்டபடி கவனிக்க; க=1; ய=10, ா=100; ∴. 10க்கு-10க்கு-குழி எத்தனை யென்றால் இதற்கு குழி—10×10=100 ஆகும். இங்கே :—10க்குத்தானம் (ஒன்று பத்து = 1 - 10) ஆக உ. மற்றோர் பத்துக்கும் ஸ்தானம் உ. ஆக மொத்த ஸ்தானம் (2+2)=4க்கு 1 போகமிருதி 3 ஆக இந்தஸ்தானம் மூன்றையும் 1 முதல் 3 மட்டும் நடத்த :— 1, 10, 100=10×10 என்று பெருக்கல் (வாய்பாட்டின் படிக்கும்) வாயின்படிக்கும் ஏற்பட்டது (1).

ா ரு ா ரு குழி எத்தனை யென்றால்; ாரு ாரு-யஷ ஆமே. [இங்கு ∵ ஷ=1000;] இதற்குதான விவரம்:—; க-ய-ா ஆகஸ்தானம் ரு; மத்தய-ா-க்கு ஸ்தானம் – ரு; ஆகஸ்தானம் சு (3+3)=(6) ஆறுக்கு க தள்ளிநின்ற ஸ்தானம். ரு-ஐந்து. ஒன்று முதல் ரு (ஐந்து) மட்டும் நடத்த க-ய-ா-ஷ-யஷ. ஆதலால் :—ா ரு ா ரு குழி யஷ. (நூறுக்கு நூறுக்குக் குழி பத்தாயிறம்) (100×100)=10000 என்பது (2).

ஷரு ஷரு குழி எத்தனை யென்றால் :— ஷ(=1000) ரு த்தானம் யெத்தனை யென்றால்-க-ய-ா-ஷ ஆ ஸ்தானம்-ச=(4). மத்தய ஷ ரு த்தானம்-ச; ஆகத்தானம்-அ-ரு க-நீக்கிதானம் எ = (7) ∴. க. முதல் எ. த்தானம் மட்டும் நடத்த-க-ய-ா-ஷ-யஷ-ாஷ-யாஷ=1000000. ஆதலால் ஷருஷரு குழி யாஷ (அதாவது ஆயிரத்துக்கு ஆயிரத்துக் குழி பத்து நூறுயிரம் என்பது பத்து லக்ஷம்) = 1000 × 1000 = 1000000 குழி; பத்து லக்ஷம் குழி என்பதாம். (3).

யஷரு யஷரு ஸ்தானம் (குழி) யெத்தனை என்றால் யஷரு த்தானம்- க-ய-ா-ஷ-யஷ- ஆகஸ்தானம் (ரு=5). மத்தய பத்தாயிரத்துக்கு (யஷரு) த்தானம் ரு=5; ஆகஸ்தானம் ய = 10க்கு ஒன்று தள்ளி நின்ற ஸ்தானம் = (கூ = 9) ஒன்பது இதை க-முதல் கூ-மட்டும் நடத்த—க-ய-ா-ஷ—யஷ—ாஷ—யாஷ (ாாஷ= கோடி)-(யாாஷ = பத்துக்கோடி); (ஆதலால் [யஷரு-யஷரு குழி யக் கோடி] =(பத்தாயிரத்துக்குப் பத்தாயிரத்துக் குழி பத்துக் கோடி) என்பது இதன்= 10000 × 10000 = 10,00,00,000 = பத்துக் கோடி யாகும் என்பது (4)

கோடிக்கு கோடிக்கு குழி எத்தனை யென்றால் :— கோடிக்கு ஸ்தானம். க-ய-ா-ஷ-யஷ-ாஷ-(-யாஷ-) (ாாஷ = கோடி) ஆ த்தானம் — (அ = 8) — மத்தய கோடிக்கு ஸ்தானம்—அ. ஆகஸ்தானம் — யரு-ரு-௨ (தள்ளி) நீக்கி ஸ்தானம் — பதினஞ்சுக்கு ஒன்று முதல் பதினைந்து மட்டு நடத்த (வேண்டிய விவரணம்) :—

க-ய-ா-ஷ-யஷ-ாஷ-யாஷ-கோடி - ய கோடி - ா கோடி-ஷக் கோடி-யஷ. கோடி-ாஷக் கோடி யாஷக் கோடி-மகா கோடி.

இதற்கின்னும் விவரணம் :—

இந்த இந்த ஸ்தானத்துக்கு	எழுத்தினல் பெயர்கள்	பூர்விகர் உபயோகித்த தமிழ் எண்களின் பெயர்களுக்குறிய குறிப்பு (அடையாளம்)	தற்காலத்தில் உபயோகித்து வரும் பெயர்களுக்குக் குறிப்பு (அடையாளம்)
1 ஞ	ஒன்று	௧	1
2 ஞ	பத்து	௰	10
3 ஞ	நூறு	௱	100
4 ஞ	ஆயிரம்	௲	1000
5 ஞ	பதினாயிறம்	௰௲	10000
6 ஞ	லக்ஷம்	௱௲	100000
7 ஞ	பத்து லக்ஷம்	(௰௱௲ = ௲௲)	1000000
8 ஞ	கோடி	(கோடி = ௰௲௲ = ௱௱௲)	10000000
9 ஞ	பத்து கோடி	(௰ கோடி = ௰௱௱௲) =	100000600
10 ஞ	நூறு கோடி	(௱ கோடி = ௱௱௱௲)	1000000000
11 ஞ	ஆயிரக் கோடி	௲க் கோடி	10000000000
12 ஞ	பதினாயிரக் கோடி	௰௲க் கோடி	100000000000
13 ஞ	நூறாயிறக் கோடி	௱௲க் கோடி	1000000000000
14 ஞ	பத்து நூறாயிறக் கோடி	௰௱௲க் கோடி	10000000000000
15 ஞ	மகா கோடி	{(கோடி கோடி) =(௱௱௲க் கோடி) =(௰௲௲ கோடி)}	100000000000000

ஆதலால் கோடிக்குக் கோடி என்பது (5).

விட்டேறு லக்கமாக வந்தாலும், மாறுபாகமாகச் சொல்லி வந்தாலும், கணக்குச் சொல்லுகிறதற்கு வகை :—

இருபத்துக்கும்-உாறும் (20 × 200) குளி (குழி) யெத்தனை யென்றால் :— உாறு ஸ்தானம் உ-உய-உா-ஆகத்தானம் ந (மூன்று). மத்தய உய (20)ம் ரெண்டும் மாற (பெருக்க) சய (40) இதை மூன்று (ஸ்தானம்) மட்டும் நடத்த சய - சா - சஐ (40 - 400 - 4000) = (20 × 200 = 4000) ஆதலால் உயரு உாறு குழி எத்தனை என்றால் சஐ என்பது.

சா.று.சாறு குழி எத்தனை யென்றால் சாறு ஸ்தானம் (முன்போல்)·ச-சய-சா ஆக ஸ்தானம் ந. மத்தய-சா-று ஸ்தானம் ந. ஆகஸ்தானம் சா (6) று ஆறுக்கு (க) ஒன்று தள்ளி நின்ற ஸ்தானம் ரு-ஐந்து-ஸ்தானம் (ரு) ஐந்து மட்டும் நடத்த ∵ [(சறுசறு=யசா) = (4 × 4 = 16) ;] ∴

யசா-ாசாய-ஐசா-யசாஐ-ாசாயஐ (16-160-1600-16000-160000) ஆதலால் சாறு சாறு குழி ாசாயஐ (லக்ஷத்தறுப தாயிறம்) (நூத்தறுபதாயிரம்) என்பது.

சாறு சாஐறு குழி எத்தனை யென்றால்-சா று த்தானம் ச-சய-சள ஆகத்தானம் ந, மத்த-சாஐ றும் சறும் மாற-உயசஐ (4 × 6000 = 24000) இதை ந மட்டும் நடத்த (ஏற்படும் ஸ்தானங்கள்) உயசஐ – உாசயஐ-உயசாஐ (24000-240000 — 2400000) ஆதலால் சாறும் சாஐறு குழி (உயசாஐ = 24,00,000) இருபத்து ஞன்கு லக்ஷம் (400 × 6000 = 2400000) யென்பது.

உயஐறு நயாஐறு குழி (அதாவது இருபதாயிரத்துக்கும் முப்பது லக்ஷத்துக்கும் = 20000 × 3000000) குழி எத்தனை யென்றால் உயஐறுத்தானம்— உ-உய-உா-உஐ-உயஐ ஆகத்தானம் ரு (= 5) என்று வைத்து நயாஐ று உறு மாற-சாயளஐ = (60,00,000) இதை-ரு-மட்டும் நடத்த (க்கண்டது) சாயளஐ-சாகோடி-, சாயகோடி - சாாகோடி - சாஐக்கோடி = (6000000 - 60000000-600000000-6000000000 — 60000000000) = (20,000 × 30,00,000) = 60000000000 ஆகலால் உயஐ று ந யாஐறு குழி சாஐக்கோடி (இருபத்தாயிறத்துக்கும், முப்பது லக்ஷத்துக்கும் குழி, அறுயிறக் கோடி) என்பது. [இதற் கிவ்விதமுஞ் செய்யலாம்:— உயஐறுத்தானம் = 5 இவ்விதமே நயாஐறுத்தானம் ந–நய–நா–நஐ–நயஐ–நாஐ–நயாஐ = (3-30 – 300 – 3000 – 30000 – 300000 – 3000000) இதற்குத்தானம் = 7 = (எ) இந்த 7ம் ஷை 5ம் சேர்க்க 12இதில் (1) தள்ள (11) தானம். ஷை 2ம் 3ம் பெருக்க (2 × 3) = 6 இந்த (சா)ஐ ஷை (யக = 11)த் தானம் மட்டும் நடத்த ஷை போல்:—

சா = (ஆறு)
சாய = (ஆறுபது)
சாா = (ஆறுனூறு)
சாஐ = (ஆறுயிறம்)
சாயஐ = (அறுவதாயிரம்)
சாாஐ = (ஆறுலக்ஷம்)
சாயாஐ = சாய லக்ஷம்
சாாாஐ = சா கோடி
சாயாாஐ = சாய கோடி

சூாாாக = $\left\{ \begin{matrix} \text{சா} \\ \text{கோடி} \end{matrix} \right\}$

சூயிாாாக = $\left\{ \begin{matrix} \text{சாக} \\ \text{கோடி} \end{matrix} \right\}$

என்றுஞ் சுலபமாகத்தானங் கணிக்கலாம்.]

சூயிாகருசயிாக ரு குழி யெத்தனை என்றால் [அறுபது லக்ஷத்துக்கும் நாற்பது லக்ஷத்துக்கும் = (6000000 × 4000000) குழி யெவ்வள வெனில்].

சயிாக ரு த்தானம் – ச – சயி – சா – சக – சயிக – சாக சயிாக – ஆகஸ்தானம் – எ – (ஏழு—7) நிருத்தி, மத்தய சூயிாக ருச ரும் மார உ கோடியே சயிாக-இதை (தானம்) [எ] (ஏழு) மட்டும் நடத்த (ஏர்ப் படுவது) — உ கோடியே சயிாக$_1$ – உயிச கோடி$_2$–உாசயி கோடி$_3$ – உகசா கோடி$_4$ – உயிசகக் கோடி$_5$ – உாசயிகக் கோடி$_6$ – உயிசாக கோடி$_7$ (ஷை 6000000 × 4 = 24000000, இரண்டுகோடியே நாற்பது லக்ஷம் இதை ஸ்தானம் ஏழுமட்டும் நடத்தும் விதம் – 24000000; 240000000; 2400000000; 24000000000; — 240000000000; 2400000000000 — 24000000000000) இருபத்து நான்கு நூறாயிரக்கோடி ஆதலால் சூயிாகரு சயிாகரு (அறுபது லக்ஷத்துக்கும், நாற்பது லக்ஷத்துக்கும்) குழியெத்தனை யென்றால் உயிசாகக்கோடி (6000000 × 4000000) = (24000000000000) —(இருபத்துநான்கு நூறாயிரக்கோடி) என்பது.—

இனிச் சில்வானம் வந்தால் சீக்கிரம் பெருக்கிச்சொல்ல வகை :—

கவனிக்கவேண்டிய இனப்பாகுபாடுகளிங்கு :—

குறிப்பு :— (ரு) = க்கு என்றாகும், இனு = இனம் என்றாகும் — இனம் என்னும் ஸ்தானத்தில் (இனு) என்றே மூலச்சுவடியில் காணப்படு கின்றது.

யிரு இனம் = க;$_1$ எஇரு இனம் = ஜ;$_2$ ருரு இனம் = இ;$_3$ உஇரு இனம் = வ;$_4$ கவரு இனம் = ஒு;$_5$ இஒுரு இனம் = ய;$_6$

[இங்கென்ன விசேஷமென்றால் இனிசொல்லப்போகும் விஷயம் பின்ன ரூபத்தில். ஆகையால் பத்தை ஒன்றாக பாவனைசெய்து மேலே சொல்லப் பட்ட இனவரிசைகளைக் கவனிக்குமளவில் — பொதுவாகப்பத்தை (யிஐ) ஆதாரமாக எடுத்துக்கொண்டால் :—

	ஆதார எண்களுக் குறிய இனம்	பின்னத்தில்	தசம பின்னத்தில் (தசாம்ச பின்னத்தில்)
1	யிரு = (10க்கு)	(க = 1)	(10 ÷ 10) = 1,
2	எஇரு = ($7\frac{1}{2}$க்கு)	(ஜ = $\frac{3}{4}$)	($7\frac{1}{2}$ ÷ 10) = 0·75,
3	ருரு = (5க்கு)	(இ = $\frac{1}{2}$)	(5 ÷ 10) = 0· 5,
4	உஇரு = ($2\frac{1}{2}$க்கு)	(வ = $\frac{1}{4}$)	($2\frac{1}{2}$ ÷ 10) = 0·25,
5	கவரு = ($1\frac{1}{4}$க்கு)	(ஒு = $\frac{1}{8}$)	($1\frac{1}{4}$ ÷ 10) = 0·125,
6	இஒுரு = ($\frac{5}{8}$க்கு)	(ய = $\frac{1}{16}$)	($\frac{5}{8}$ ÷ 10) = $\frac{5}{80}$ 0.0625,

இப்படி யேற்படுவதால் இதன் விசேஷங்களை (தசாம்சகணித சம்பந்தமாக நம்பூர்வீகர்கள் கணிதத்தில் எண்ணிவந்த விசேஷநிர்ணயங்களுடைய கருத்துக்களை) முன்னுரையில் நன்கு காண்க] என்பது.

இடைவெளித்தானம், மூலம் கனப்படுத்தல் கனத்தை மூலப்படுத்தல் இந்த இரண்டு வகைக்கும் முன்னிது பின்னிதாம், பின்னிது முன்னிதாம் கொள்ளலாம். **விபரம் (ஒன்று).—**

க. வஜ: வஜ = (1 × $\frac{1}{320}$ = $\frac{1}{320}$); ௰.வஜ: ஹ = (10 × $\frac{1}{320}$ = $\frac{10}{320}$ = $\frac{1}{32}$); ௱. வஜ: வய = (100 × $\frac{1}{320}$ = $\frac{5}{16}$);

க. ஶ: ஶ = (1 × $\frac{1}{160}$ = $\frac{1}{160}$); ௰.ஶ: ய = (10 × $\frac{1}{160}$ = $\frac{1}{16}$); ௱. ஶ: இஓ = (100 × $\frac{1}{160}$ = $\frac{100}{160}$ = $\frac{5}{8}$);

இவ்விதம் பயிற்சியின் காரணமாக மற்றும் கீழ்வருவன யாவும் கவனிக்க :—

ஶவஜ-பஜூஶ-வஜஙூ-ஜு-ஓ-கவ - ஜுவஜ - ... ஶ — ... இப - ஜுஶ ஙூ- கஜஓ-ஜுஶவஜ - ஹஜுஶ - உஙூ - சுவஉஇ - சுவஜ - வஹ - வஜ - ய - ஹவப-ஙூஓ - சுஶவஜவ பஜூஶ-ஙூவஙூ ஜூ-வஓ ஙூஜ-ஜூவஜவஙூஶ-சுய-ஜூஶவஙூ

சுவஓ ஜூஶவஜ-வஹஜுஶ-சுஇஙூ- (ப-இ-ரு) (ஃ-க-௰) - ஹ = கஇ = ௰ரு - ஹ-உ உ௰ ய-இஓ-சுவ; ஓ கவ-௰உஇ; ஙூகஜஓ-௰அஜ-

உஇ-உ௰ரு; வய-ஙூஓ ஙூ௰கவ; வஓ-ஙூஜ-ஙூ௰எஇ; வஙூ சவஓ-ச௰ஙூஜ; இ-ரு-ரு௰; இப-ருஇஓ-ரு௰சுவ; இஓ-சுவ-சு௰உஇ; இஙூசுஜஓ-சு௰அஜ —

ஜ-எஇ-எ௰ரு; ஜய - அஓ-அ௰கவ-ஜஓ-அஜ - அ௰எஇ - ஜஙூ-கூவஓ-கூ௰ஙூஜ-க-௰-௱-௲-௰௲-௱௲ - ௰௱௲ - கோடி - ௰க்கோடி - ௱கோடி - ௲க்கோடி - ௰௲க் கோடி-௱௲க்கோடி - ௰௱௲க்கோடி - மகாகோடி.

[இவ்விதம் பின்ன வாய்ப்பாடுகளைச் சுருக்கிக் கர்த்தா கூறியிருக்கிறார். கிரந்தம் பார்க்கும் தோஷம் எழுதும் தோஷம் இவைகளை முன்னிட்டோ அல்லது எந்தக்காரணத்தாலோ இவைகள் ஒழுங்குபெற வரிசைப்படி வரவில்லை இவைகளுடைய சர்வ சந்தேக நிவாரணத்திற்காக முந்திரி முதற்கொண்டு சிலமுக்கியமான (முன்னுறையிற் கண்ட) பின்ன வாய்ப்பாடுகளை மனப்பாடம்

செய்வதற்காகவே இப்பட்டி தயார்செய்தது. இதில் கண்ட பெயர் உச்சரிப்பு (ஸம்க்ஞை) குறிப்புகள் இவைகளைக்கொண்டு பெரிய கெட்டி எண்சுவடி முதலியவைகளில் உள்ள முந்திரி முதலிய பின்ன வாய்ப்பாடுகளைக் கொண்டும்; பெருகுழி சிறுகுழி முதலிய வாய்ப்பாடுகளைக்கொண்டும்; (மனப்பாடம் செய்து) வெகு சுலபமாகக் கணிக்க இயலும்.

மேலும் இந்த கணித புத்தகத்தில் கீழ்வாய் லக்கங்களும் சிலவிடங்களில் வருகிறது. சிறுகுழிக்கணிதத்தில் அவசியம் கீழ்வாய் லக்கங்கள் வந்தே தீரும். ஆகையாலந்த பின்னங்களின் தமிழ் பெயர்கள் குறிப்புகள் இதற்குச் சரியான தசாம்சபின்னங்கள் அடங்கிய பட்டி விவரம்.

வரிசை நெ.	தமிழில் பெயர்கள் (அல்லது) உச்சரிப்புகள்.	குறிகள்	1க்குறிய அம்சங்கள் (ஸமான பின்னம்)	தசாம்ச பின்னம்
1	முந்திரி	(வ்த)	(1/320)	0·003125,
2	அரைக்காணி	(ு)	(1/160)	0·00625,
3	காணி	(்)	(1/80)	0·0125,
4	அரைமா	(= சு)	(1/40)	0·025,
5	முக்காணி	(சு ் = சூ)	(3/80)	0 0375,
6	ஒருமா	ப	(1/20)	0·050 = (0·05),
7	வீசம்	(ப ் = ய)	(1/16)	0·0625,
8	ரண்டுமா	ஃ	(1/10) = (0-1)	0·100 = (0·1)
9	அரைக்கால்	(ஹு = ஓ)	(1/8)	0·125,
10	மும்மா	ஈ	(3/20)	0·15
11	மூவீசம்	(ஈடி)	(3/16)	0·1875,
12	நாலுமா	சஃ	(1/5) = (.2)	0·2
13	கால்	வ	(1/4)	0·25,
14	அரை	(௨ = இ)	(1/2)	0·5,
15	முக்கால்	(ஊ = ஹ)	(3/4)	0·75
16	ஒன்று	க	1	1·00

(17) முக்காணி யரைக்காணி = சு ் ு = சூ ு = $\left(\frac{7}{160}\right)$ = 0.04375

கீழ்வாய் இலக்கங்களின் விவர மாவன :—

அதாவது

(1) கீ ௩ = கீழ் முக்கால் = $(\frac{1}{320} \times \frac{3}{4}) = (\frac{3}{1280})$,

(2) கீ ௨ = கீழ் அரை = $(\frac{1}{320} \times \frac{1}{2}) = (\frac{1}{640})$,

(3) கீ வ = கீழ் கால் = $(\frac{1}{320} \times \frac{1}{4}) = \frac{1}{1280})$,

(4) கீ ௶ = கீழ் அரிக்கால் = $(\frac{1}{320} \times \frac{1}{8}) = \frac{1}{2560})$,

(5) கீ ய = கீழ் விசம் அல்லது கீழ்மாகாணி = $\frac{1}{320 \times 16}$

(6) கீ வ௩ = கீழ் முந்திரி—— = $\frac{1}{320} \times \frac{1}{320} = \frac{1}{(320)^2}$

ஷை கீ ய = $\frac{1}{320} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{5120}$;

ஷை கீ வ௩ = $\frac{1}{(320)^2} = \left\{\frac{1}{320 \times 320}\right\} = \left\{\frac{1}{102400}\right\} = \cdot 00000976 5625$;

என்ற இவ்வாறு அதாவது (கீழ்முக்கால் என்றால்) (கீ ௩) என்றால் (முந்திரியை இங்கு ஆதாரமாக வைத்து) முந்திரிக்கு முக்கால் எவ்வளவு, என்றும் (கீ ௨) என்றால் முந்திரிக்கு அரைப்பங் கெவ்வளவு, (கீ ய) என்றால் முந்திரிக்கு பதி ஞயில் ஓர் பங்கென்ன என்றும், (கீ வ௩) என்றால் முந்திரிக்கு முந்திரி அதாவது 320ல் 1 பங்குக்கு 320ல் 1 பங்கென்ன என்று இவ்வாறெல்லாம் கேட்ட வற்றிற்கு சொல்லக்கூடிய பதிலாம். இதர சந்தேகங்கட்கு மேலே காட்டிய 6வித உதாரணங்களாலும், முன் னுறையில் கண்ட பட்டியாலும், இன்னு மேற்படும் சகல சந்தேகமும் நீங்கும்.] அப்பாலும் கோடி முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற தொகைக்குக் கவி :—

நாக்கோடி சிங்கம் நல்விந்தம் நாப்பதுமம், மத கொரச்ச முத்திரத்தின் தாமரைவேர், சதவெள்ளம், பிரளயமாய், மெய்த்ததொரை ரு) யோசினை கற்ப நிகற்பம், கடிமகாருறதன் பனையுற [று] பலம், அற்புத மென்றோது (4):—

என்று சொல்லும். இதற்கு ஒன்றின் பேரிலே மகா மகா வென்று— ௰சூ-ஸ்தானம் வரும். ஒன்று முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற தொகைக்கு இனம்-க-௰-ா-௲-௰௲-ா௲-௰ா௲-ஆ கத்தானம் எ-(எழு). அப்பால் கோடி முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற தொகைக்கு-இனு உா௰அ-ஆ-இனு-உாஉ௰ரு-இந்தப்படி அதிகாரக்காரர் அருளிச்செய்தது.

எஇரு அ௰அரு குழி பெருக்க வென்றால் எஇரு. இனப்-௩-($\frac{3}{4}$) யென்று வைத்துக் கொண்டு அ௰அ-ரு-௩-ரு பெருக்க-சு௰சூ-இதைப் (௰ல்) பத்தில் பெருக்க-சூ௰-சூா-சூ; ஆ-சூாசு௰.(660); ஆதலால் எஇ=(=$7\frac{1}{2}$) ரு-அ௰அ (= 88) ரு குழி ($7\frac{1}{2} \times 88 = 616 + 44 = 660$) = (சூாசு௰)-என்பது.

௰எஇ ($17\frac{1}{2}$) ரு அ௰அ (88) ரு குழி எத்தனை யென்றால் ௰எஇ இனம் ($1\frac{3}{4}$) சஞ-என்று வைத்துக்கொண்டு அ௰அ (88) ரு சஞ ($1\frac{3}{4}$) ருப்பாற ாரு௰ச (154); இதனை பத்தில் (௰ல்) படுத்த ௲ருாச௰ ($1540 = 154 \times 10$). என்பது.

ம௱௫ ரு சமகூ இ௸ ரு குழி யெத்தனை யென்றால்-ம௱௫-ரு இனம்-க இ—என்று வைத்துக்கொண்டு சமகூ இ௸ ($46\frac{5}{8}$) ரு க இ ($1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$) ரு மாற-(கூமக ஜ ரு)— இதை ம (10)ல் படித்த கூாகூம க வ௸ ($=699\frac{3}{8}$) என்பது.

மகூ ரு சமகூ இ௸ குழி யெத்தனை யென்றால் சமகூ இ௸ ($46\frac{5}{8}$)வில் பாதி உமங வய ($23\frac{5}{16}$); இதை சமகூ இ௸ ($4/6\frac{5}{8}$)வுடனே துகைகூட்ட கூமக ஜ ரு ($69\frac{15}{16}$) இதை பத்தில் (ம)ல் (10-ல்) படித்த கூாகூமக வ௸ ($699\frac{3}{8}$); மற்ற ஒன்றுக்கு சமகூ இ௸ ($46\frac{5}{8}$) துகையுடனே கூட்ட எாசமகூ-(746) ஆகலால் மகூ (16) ரு சமகூ இ௸ ($46\frac{5}{8}$) ரு குழி—எாசமகூ (746) யென்பது.

மக (19) ரு சமகூ இ௸ ($46\frac{5}{8}$) ரு குழி யெத்தனை யென்றால்—மக (19)க்கு மேல் ஒண்ணு கூட்டினால் உம (20); இதுக்கு இனம்-உ (2); சமகூ இ௸ ($46\frac{5}{8}$) ரு உ (2) ரு மாற கூமங வ ($93\frac{1}{4}$). இதை பத்தி (ம)ல் படித்த கூாஙம உ இ ($932\frac{1}{2}$), அதில் முன் பத்தொன்பதுக்கு மேல் க (1) கூட்டின துக்கு-சமகூ இ௸ ($46\frac{5}{8}$ போக நீக்கி அா அமரு ஜ ௸ ($885\frac{7}{8}$) குழி என்பது.

மக இரு சமகூ இ௸ (அதாவது $19\frac{1}{2} \times 46\frac{5}{8}$) குழி எத்தனை யென்றால் ($19\frac{1}{2}$) (-மக இரு மேல்-இ-($\frac{1}{2}$) கூட்டினால் உம (20) (இதற்கினம்) = உ (2); சமகூ இ௸ ($46\frac{5}{8}$) ரு உ (2) ரு மார கூமங வ ($93\frac{1}{4}$); இதை பத்தி (ம = 10)ல் படித்த கூாஙம உ இ ($932\frac{1}{2}$) இதில் முன் பத்தொன்பதற்கு மேல் கூட்டின இ ($\frac{1}{2}$) ரு உமங வய ($23\frac{5}{16}$) தள்ளி நீக்கி கூாக ரு ($909\frac{3}{16}$) குழி என்பது.

இந்த வகையை நன்றாயிப்படி பார்த்துச் சொல்ல வந்தால் சபையிலே கூட்டக்களிக்க கணக்குப் பிள்ளை கெட்டிக்காரனென்று பேருவான்.

யின்னஞ் சில்வானங்கூட்டி பெருக்குகிற வகை :—

ம உ இ ($12\frac{1}{2}$) ரு ௱சூம (160) ரு குளி யெத்தனை யென்றால் மஉஇ ($12\frac{1}{2}$) ரு இனம் — கவ ($1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$); யிதனுடனே ௱சூம (160) மாற-உா (200) இதை (ம=10)ல் படித்த உசூ=(2000); ஆதலால் மஉ இ ($12\frac{1}{2}$) ரு ௱சூம (160) ருக் குளி உசூ (2000); என்பது.

மக ஜ (ஹ) ௸ ($11\frac{7}{8}$) ரு-௱அம-(180) ரு குழி எத்தனை யென்றால்— மகஜ (ஹ) ௸ ($11\frac{7}{8}$) ரு இனம் க ரு ($1\frac{3}{16}$) இதனுடனே-௱அம (180) யை மாற உாமஙஜ ($213\frac{3}{4}$) இதை-ம (10)ல் படித்த உசூாஙமஎ இ ($2137\frac{1}{2}$) $=(11\frac{7}{8}\times180)=(11.875\times180)$; என்பது.

மக இ ($11\frac{1}{2}$) ரு-உாசம (240) ரு-குழி எத்தனை யென்றால் :— மகஇ ($11\frac{1}{2}$)ரு இனம்-(கஙி) = (ஒன்றும்மும்மாவும்) [அதாவது $(11\frac{1}{2} = 11.5)\times\frac{1}{10}=1\cdot15;$) இங்கு மும்மா = ஙி = $\frac{3}{20}$ = 0·15; ∴ $11\frac{1}{2}$ ரு இனம் 1·15=கஙி என்றபடி] ($1+\frac{3}{20}$ = கஙி), இதனுடனே உாசம (240) மாற உாஎமகூ (276) இதை ம (10)ல் படித்த உசூஎாசூம (2760) குழி-என்பது.

௰ இ ௮ு ($10\frac{5}{8}$) ரு சூ௰௪ ரு குழி எத்தனை யென்றால்:—௰ இ ௮ு ($10\frac{5}{8}$) ரு இனம் = கய ($1\frac{1}{16} = 1{\cdot}0625$); இதனுடனே-சூ௰௪-(64) மாற-சூ௰அ (68) இதை-௰ (10)ல் பெருக்க-சூ௱அ௰ (680) ஆதலால்-சூ௰௪ (64) ரு ௰ இ௮ு ($10\frac{5}{8}$) ரக்குழி-சூ௱அ௰ (680) யென்று சொல்லவும்.

இனிக் கூட்டிக் கழித்து பெருக்கிச் சொல்லுகுர விபரம். விரித்துக் காட்டல்:—௰௫ ஞ௱ ($15\frac{15}{16}$) ரு ௰௫ ஞ௱ ($15\frac{15}{16}$) ருக் குழி யெத்தனை என்றால், ௰ (10) ரு ௰ (10) ரு ௱ (100); ௰.௫ (10×5) = ௫௰ (50), ௰·ஞ-எஇ = ($10 \times \frac{3}{4} = 7\frac{1}{2}$); ஆக ௱௫௰எ இ ($157\frac{1}{2}$); ௰·௱: க ஞ௮ு = ($10 \times \frac{3}{16} = 1\frac{7}{8}$) ௱௫௰௯ வ௮ு ($159\frac{3}{8}$); ௰·௫ : ௫௰ ($10 \times 5 = 50$); உ௱௯ வ௮ு ($209\frac{3}{8}$); ௰·ஞ: எஇ=($10 \times \frac{3}{4} = 7\frac{1}{2}$)யும் கூட்ட-உ௱௰௬ ஞ௮ு ($216\frac{7}{8}$); ௰·௱·கஞ௮ு ($10 \times \frac{3}{16} = 1\frac{7}{8}$) ஆ. உ௱௰அ ஞ ($218\frac{3}{4}$);— ௫.௫—உ௰௫ ($5 \times 5 = 25$); ஆ. உ௱௪௰௩ ஞ ($243\frac{3}{4}$). ௫·ஞ:௩ஞ ($5 \times \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$) ஆ. உ௱௪௰எ இ ($247\frac{1}{2}$), ௫ ௱·ஞ௱ = ($5 \times \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$) ஆ. உ௱௪௰அவ௱ = ($248\frac{7}{16}$); ௫ (ஞ) ௩ஞ ($5 \times \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$) ஆ.-உ௱௫௰உ௱ ($252\frac{3}{16}$); ௫௱--ஞ௱ ($5 \times \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$) ஆக-உ௱௫௰௩௮ு ($253\frac{1}{8}$);— ஞ ரு ஞ: இய = ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$) ஆ. உ௱௫௰௩இ௱ ($253\frac{11}{16}$); ஞ௱--உசூவஞ = [($\frac{3}{4} \times \frac{3}{16} = \frac{9}{64} = 0{\cdot}140625$; $= \frac{1}{10} + \frac{3}{80} + \frac{1}{320}$)] அதாவது முக்காலுக்கு மூன்று விசம்) எவ்வளவு பரிமாணம் என்றால் (முக்கால் × மூன்றுவீசம் = [(இருமா = ௨ = $\frac{1}{10} = 0{\cdot}1$) + (முக்காணி = சூ = $\frac{3}{80} = 0{\cdot}0375$) + (முந்திரி = வஞ = $\frac{1}{320} = 0{\cdot}003125$)] ∴ ஷை ஞ௱ = ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{16}$) = (உசூவஞ) = $\frac{1}{10} + \frac{3}{80} + \frac{1}{320} = \frac{9}{64}$ = (இருமா முக்காணி முந்திரி) ஆ. உ௱௫௰௩ஞபசூவஞ = ($253 + \frac{3}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{320} = 253 +$

$$\left\{ \frac{(240+16+8+1)}{320} = \frac{265}{320} = \frac{53}{64} \right\}$$ அல்லது இதற்குச் சமம் = $\left\{ 253 + \frac{11}{16} + \frac{9}{64} \right\} = \left\{ 253 + \left(\frac{44+9}{64} = \frac{53}{64} \right) \right\}$ அதாவது இருநூத்தைம்பத்து மூன்றே முக்காலே யொருமா முக்காணி முந்திரி—ஞ௱-உசூவஞ (முன் போலவே மறுபடி. $\frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{9}{64}$). ஆ. உ௱௫௰௩ ஞ சபஉபி = [$253 + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{80} + \frac{1}{160} = 253 + \left(\frac{120 + 32 + 2 + 1}{160} = \frac{155}{160} \right) = \left(253\frac{31}{32} \right)$; ௱ ரு ௱—சு பி வஞ கீவ = ($\frac{3}{16} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{40} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{1280} = \frac{45}{1280}$ $= \frac{9}{256}$ ∴ $\frac{3 \times 3}{16 \times 16} = \left(\frac{9}{256} \right)$; ($253\frac{31}{32} + \frac{9}{256} = 254\frac{1}{256}$) ஆ. உ௱௫௰௪ வஞகீவ ($254\frac{1}{256}$); ஆகலால்—௰௫ ஞ௱ ரு ௰௫ ஞ௱ ரு குழி உ௱௫௰௪வஞகீவ ($254\frac{5}{1280} = 254\frac{1}{256}$) என்பது

[ஷை கணக்கின் விசேஷ (க்குறிப்பு :—). உதாரணம் :—

இந்த கணித ஸாராம்சம் என்னவென்றால்:—௰௫ ஞ௱ ரு ௰௫ ஞ௱ ரு குழிகணிக்கும் பூர்வீக இந்துக்கள் வழியை இங்கு விளக்கப் படுகிறது. ஷை ௰௫ ஞ௱ ரு = $15\frac{15}{16} = (10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16})$ ∵

$$\therefore (10+5+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{16})^2 = (10+5+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{16}=A)\ (10+5+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{16}=B) \because$$

∴ ஷை A'யை B ஆல் பெருக்கும் பூர்வீக உதாரணம் :—

A \ B	(இப்பட்டியில்) $(10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16})^2$			
$+10$	100	50	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{8}$
$+5$	50	25	$3\frac{3}{4}$	$\frac{15}{16}$
$+\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{64}$
$+\frac{3}{16}$	$1\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{256}$
$(A+B)^2 = 254\frac{1}{256}$	$159\frac{3}{8}$	$79\frac{11}{16}$	$11\frac{61}{64}$	$2\frac{253}{256}$

இங்கே முழு எண்களை முதலில் கூட்டிய

159
79
11
2
———
251 ஆ. இந்த இரு

தொகையுங் கூட்ட

251 (மேலெண்)
$3\frac{1}{256}$ (கீழெண்)
———
$254\frac{1}{256}$ ஆ

என்றாகும் :

மிகுதி பின்னத் தொகைகளையும் கூட்ட :

$$\frac{3}{8}+\frac{11}{16}+\frac{61}{64}+\frac{253}{256} = \frac{96+176+244+253}{256} = \frac{769}{256} = 3\frac{1}{256} \text{ ஆ}$$

∴ ஷை $(A+B)^2 = 254\frac{1}{256}$ என்பதாம். இதை இன்னுஞ் சுருக்கமாக, **ஸ்ரீதர. பாஸ்கராசார்யர் முதலிய பண்டிதர்கள்** கூறும் (உம்) வழி :—

ஷை $15\frac{15}{16} = \frac{255}{16}$ இதன் வர்க்க $= \left(\frac{255}{16}\right)^2 = \left(\frac{255}{16} \times \frac{255}{16}\right) = \left(\frac{65025}{256}\right) =$ $254\frac{1}{256}$. என்பதாம் இவ்விதமே **எவ்விதக் கடின பின்னங்கட்கும் வர்க்கம் முதலிய** ஸாதனம் செய்துக் கொள்ளலாகும்.]

இப்படி விரிவாய்ச் சொல்லுகிறதை சீக்கிரமாகச் சொல்லுகுறதற்கு வகை-ம்ரு ஞரு- $(15\frac{15}{16})$யுடனே-ப $(\frac{1}{16})$ கூட்டினால் மசு (16); மத்த-ம்ரு ஞரு- $(15\frac{15}{16})$யுடமேன-ப $(\frac{1}{16})$ கூட்டினால் மசு (16) என்று வைத்துக் கொண்டு மசு ரு மசு (16×16) குழி உாருமசு (256) இதில் மசு-ய: க $= (16 \times \frac{1}{16} = 1)$ மத்தய-மசு-ய: க $(16 \times \frac{1}{16} = 1)$ ஆக உ (2) தள்ளி நீக்கி-உாருமச (254) இதனுடனே-ய ரு ய: வுத க்ஷ வ $= (\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256} =$ முந்திரிகீழ்க்கால் $= \frac{1}{320} + \frac{1}{1280} = \frac{5}{1280} = \frac{1}{256})$ யைக் கூட்டிக் கொண்டு ஆ உாருமச வுத க்ஷவ-ஆதலால் ம்ரு ஞரு- ரு ம்ரு ஞரு- ரு பெருக்கின குழி உாருமச வுத க்ஷவ $(15\frac{15}{16} \times 15\frac{15}{16} = 254\frac{1}{256})$ என்பது.

சமக ஞசபு ரு சமக ஞசபு ரு குழியெத்தனையென்றால்:— சமக ஞசபு $(49\frac{19}{20})$வுடமேன-ப $(\frac{1}{20})$ கூட்ட ருமி (50) மத்தய-சமக சபு $(49\frac{19}{20})$வுடனே-ப $(\frac{1}{20})$ கூட்ட ருமி (50) இதனை ருமி-ரு-ருமி-ரு பாற உகுரு $(50 \times 50 = 2500)$ இதில்

கனிவு-ரும்-ப: உ இ ($50 \times \frac{1}{20} = 2\frac{1}{2}$) மத்தய-ரும்-ப: உ இ ($50 \times \frac{1}{20} = 2\frac{1}{2}$) ஆக ரு (5) தள்ளி நின்றது உஙசாகயரு (2495) இதனுடனே-பரு ப: கீழ் ஜ ப $= (\frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{400} = \frac{3}{1280} + \frac{1}{6400} = \frac{15+1=16}{6400} \therefore \frac{1}{400} =$ கீழ் முக்காலேமா)

(ஆகையால மொத்தம்) கூட்டித் தொகை:—(உஙசாகயரு கீழ் ஜப) $=$ ($2495\frac{1}{400}$) ஆதலால:—சமக ஜசபு ($49\frac{19}{20}$)ரு சமக ஜசபு ($49\frac{19}{20}$)ரு (குழி) குழி $=$ உஙசாகயரு கீழ் ஜப ($2495\frac{1}{400}$) என்பது.

கீழ்-மேல் கமக ஜ சபு சூரி வதரு தென்வடல் கமக ஜ சபு சூரி வதரு அதாவது ($99\frac{319}{320} \times 99\frac{319}{320}$) குழி பெக்தென யென்றால்—இதற்கு யேரு லக்கத்தையும் (எ' எ: சமக) விசையல்லவா (12ம் பக்கத்தில் காட்டிய விசேஷ உதாரணப்படி ஏற்படும் $= 7 \times 7 = 49$ விசை யல்லவோ) பெருக்க வேணும். பெருக்கித் தொகை காணுகிறவன். நூத்திலொருவன். அப்படி-12-ம் பக்கத்தில் காட்டிய வழிப்படிக்கே ($7 \times 7 = 49$) தரமாக வெகு விஸ்தாரமாய்ப் பெருக்கு வதற்கு உதாரண மானபட்டி:—

A \ B	90	$+9$	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{3}{80}$	$+\frac{1}{160}$	$+\frac{1}{320}$
90	8100	810	$67\frac{1}{2}$	18	$3\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{32}$
$+9$	810	81	$6\frac{3}{4}$	$1\frac{4}{5}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{160}$	$\frac{9}{320}$
$+\frac{3}{4}$	$67\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{640}$	$\frac{3}{1280}$
$+\frac{1}{5}$	18	$1\frac{4}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{1600}$
$+\frac{3}{80}$	$3\frac{3}{8}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{9}{6400}$	$\frac{3}{12800}$	$\frac{1}{25600}$
$+\frac{1}{160}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{160}$	$\frac{3}{640}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{3}{12800}$	$\frac{1}{25600}$	$\frac{1}{51200}$
$+\frac{1}{320}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{1280}$	$\frac{1}{1600}$	$\frac{3}{25600}$	$\frac{1}{51200}$	$\frac{1}{102400}$
$9999 + \frac{38401}{102400}$	$8999\frac{23}{32}$	$899\frac{311}{320}$	$74\frac{1277}{1280}$	$19\frac{1599}{1600}$	$3\frac{19197}{25600}$	$\frac{31999}{51200}$	$\frac{31999}{102400}$

ஷெ களின் ஸர்வஸம் யோகம் $= 9999\frac{38401}{102400}$ ஆ குமிதன் $= (A+B)^2$.

$(8999 + 899 + 74 + 19 + 3) = 9994 =$ பூ.

$\frac{23}{32} + \frac{311}{320} + \frac{1277}{1280} + \frac{1599}{1600} + \frac{19197}{25600} + \frac{31999}{51200} + \frac{31999}{102400} = \left\{\frac{550401}{102400}\right\} =$

$$\frac{(73600 + 99520 + 102160 + 102336 + 76788 + 63998 + 31999)}{102400}$$

(பி) $= 5\frac{38401}{102400}$; ஷெ (பூ + பி) $= 9994 + 5\frac{38401}{102400} = 9999\frac{38401}{102400}$.

$$\therefore \left(99\frac{319}{320}\right)^2 = \left(\frac{31999}{320}\right)^2 = \frac{31999 \times 31999}{320 \times 320} = \frac{1023936001}{102400} =$$

$\left(9999\frac{38401}{102400}\right)$ என்றே ஷெ போலாம்.

இதற்குச் சுருக்கமாகப் பெருக்குகிற வகை :—

கூஙிகூ ஞ சுய சூ ஙி வஞ $\left(99\frac{319}{320}\right)$ ரு (க்கு) மேலே—வஞ $\left(\frac{1}{320}\right)$ முந்திரி கூட்ட ள (100). மத்த யகூஙிகூ ஞ சுய சூ ஙி வஞ $\left(99\frac{319}{320}\right)$க்கு மேலே-வஞ $\left(\frac{1}{320}\right)$. கூட்ட ள (100). இதைத்தன்னில் மாற-ள ரு ள = ஙிஞ-$(100 \times 100 = 10000)$ இதில் களிவு-ள வஞ: வப $= \left(100 \times \frac{1}{320} = \frac{100}{320} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}\right)$; மற்ற-ள-வஞ வய $= \left(100 \times \frac{1}{320} = \frac{5}{16}\right)$. ஆக இது $\left(\frac{5}{8}\right)$ தள்ளி நிக்கி—கூஞகூளகூஙிகூ வஓ $= 9999\frac{3}{8}$ ரு மேல்-வஞ ரு வஞ: கீவஞ $= \left(\frac{1}{320} \times \frac{1}{320} = \frac{1}{102400}\right)$ கீழ்முந்திரி கூட்ட துகை கூஞகூளகூஙிகூ வஓ கீவஞ $\left(9999 + \frac{3}{8} + \frac{1}{102400}\right)$ $= \left(9999\frac{38401}{102400}\right)$ குழி யென்பது.—

இதை பாஸ்கராசாகாரியாதிகளின் வழியின்படிக்கும் (12ம் பக்கம் 2ம் விவரப்படி) செய்ய $\left[\left(99\frac{319}{320}\right)^2 = \left(\frac{1023936001}{102400}\right) = 9999\frac{38401}{102400}\right]$க்குழி **ஷெ** போல் வரும். விட்டேறு லக்கமாக வந்தால் பெருக்குகிற வகைக்கு விபரம்:—

உஙிச ஞஸ $\left(24\frac{15}{16}\right)$ ரு நூஙிகூ ஞஸ $\left(39\frac{15}{16}\right)$ ரு குழி யெத்தனை என்றால்.

உஙிச ஞஸ $\left(24\frac{15}{16}\right)$ புடனே மாகாணி $\left(ய = \frac{1}{16}\right)$ கூட்ட உஙிரு (25); மற்றய நூஙிகூ ஞஸ $\left(39\frac{15}{16}\right)$-ய $\left(\frac{1}{16}\right)$ கூட்ட சஙி (40); உஙிரு (25) ரு இனம் உஇ $\left(2\frac{1}{2}\right)$ யென்று நிருத்தி-சஙி (40)ம் உஇ $\left(2\frac{1}{2}\right)$யும் மாற-ள (100); இதை-ஙி (10)ல் படுத்த-ஞ $(= 1000)$; யிதில் களிவு.—உஙிரு (25) ரு-ய $\left(\frac{1}{16}\right)$-க இ ய $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}\right)$; சஙி (40) ரு-ய $\left(\frac{1}{16}\right)$-உஇ $\left(2\frac{1}{2}\right)$ ஆக ச ய $\left(4\frac{1}{16}\right)$ தள்ளி நீக்கி கூளகூஙிரு ஞஸ $\left(995\frac{15}{16}\right)$ ரு யிதுவுடனே—ய ரு ய $\left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{16}\right)$ வஞ கீவ $\left(\frac{1}{256}\right)$ம் கூட்டித்துகை—கூளகூஙிரு ஞஸ வஞகீவ $\left(995 + \frac{1205}{1280} = 995\frac{241}{256}\right)$ குழி யென்பது.

மற்றும் வந்தன வெல்லாம் இப்படிப்பார்த்துச் சொல்லவும்.

இப்பால் குளியளந்து கோலெடுக்குதுக் குள்ளாக நிலம் சொல்லு கிரதற்கு பந்துக் கட்டு. (விபரம். ரண்டு)

(1) ஙிசா ரு ய: க $= \left(16 \times \frac{1}{16} = 1\right)$;
(2) ஙிரு ரு ய: ஞஸ $= \left(15 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{16}\right)$;
(3) ஙிச ரு ய: ஞஓ $= \left(14 \times \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}\right)$;

(4) ௰௩ ரு ய. தூ ய $= (13 \times \frac{1}{16} = \frac{13}{16})$;
(5) ௰௨ ரு ய. தூ $= (12 \times \frac{1}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4})$;
(6) ௰க ரு ய. இஃ $= (11 \times \frac{1}{16} = \frac{11}{16})$;
(7) ௰ ரு ய: இஹ $= (10 \times \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8})$;
(8) கூ ரு ய: இய $= (9 \times \frac{1}{16} = \frac{9}{16})$;
(9) அ ரு ய: இ $= (8 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16}) = (\frac{1}{2})$:
(10) எ ரு ய: வஃ $= (7 \times \frac{1}{16} = \frac{7}{16})$;
(11) கூ ரு ய. வஹ $= (6 \times \frac{1}{16} \times \frac{6}{16} = \frac{3}{8})$;
(12) ரு ரு ய: வய $= (5 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{16})$;
(13) ச ரு ய: வ $= (4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = \frac{4}{16})$;
(14) ங ரு ய: ஃ $= (3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{16})$;
(15) உ ரு ய: ஹ $= (2 \times \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8})$;
(16) க ரு ய:—(ய) $= (1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16})$;

யென்பது. (விபரம் மூன்று)

கரு, ஆவது-ப-ஆறைல தூஃரு, ஆவது-சூலிவஹ-தூஹ-ரு, ஆவது, சூலி-தூய-ரு, ஆவது-சூவஹ-தூரு,-ஆவது, சூ-இஃரு,-ஆவது, சலிவஹ - இஹரு,-ஆவது, சலி-இயரு,-ஆவது, சவஹ-இரு,-ஆவது-சு-வஃரு,- ஆவது,- உலிவஹ - வஹரு,- ஆவது உலி வயரு; ஆவது உவஹரு,-வ-ஆவது-உ-ஃரு, ஆவது, லிவஹ-ஹரு,-ஆவது; லி-ய-ரு, ஆவது-வஹ யென்பது.

குறிப்பு:—இதன் ஸாராம்சம் யாதெனில்:—ஒன்றுக்கு ஒருமா $(1 = \frac{1}{20})$ ஆகையால் ஷை $\frac{15}{16}, \frac{7}{8}, \frac{13}{16}, \frac{3}{4}, \frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ முதலிய பின்னங்கட்கு மா(ப $= \frac{1}{20}$) எவ்வளவு என்று பார்க்கும் திறைருசிக் கணிதமேயாகும். என்பது தமிழ் லக்கத்தில் மேலே சொன்னபடிக்காகும்.

இந்த மூன்று வகைத் தானமும் நன்ருய் மனப்பாடம் பண்ணிக் கொண்டால் கோலளவு நிலவளிக் குழி (விஸ்தாரம்) விஸ்தீர்ணம். யெல்லாம் சுருக்கமாகச் சொல்லலாம்— இதை விரித்துக் காட்டல்:—

கீழ் (கீழ்மேல்) ச (4) ரு தென்மீ (தென் வடல்) ச (4) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்:— ச-ய. வ $(4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4})$ மத்த-ச-ய: வ $(4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4})$. வரு வரு $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$க்கு) மாற வ-ருவ: ய $(\frac{1}{16})$க்கு ஆவது - வஹ-ஆதலால் கீழ் ச ரு தென்மீ ச ரு-வஹ-(முந்திரி) என்பது.

கீழ் அ (8) ரு தென்மீ அ (8) ரு குழியெத்தனை யென்றால்:—

அ ய: இ $(8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2})$ மத்த அ-ய: இ. $(8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2})$ ∴ இ ரு இ $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) =$ வ $(\frac{1}{4})$; ஆதலால் அரு அரு—ஷை போல் ஒ $(= \frac{1}{80})$ என்பது.

கீழ் ௰௨ (12)ரு தென்மீ ௰௨ (12) ரு குழி யெத்தனை யென்றால்—௰௨-ய: தூ $(12 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{4})$ மத்த-௰௨ ய: தூ $(12 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{4})$ ∴ தூ ரு தூ: இய $(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}) =$ இய ஆவது-சு வஹ $(\frac{1}{40} + \frac{1}{320}) = (\frac{9}{320})$ என்பது.—

ᐳசா ரு ᐳசா ரு (16×16) நிலம் யெத்தனை யென்றால்—ᐳசா ரு ய: க $(16 \times \frac{1}{16} = 1)$; மத்த ᐳசா ரு ய: க $(16 \times \frac{1}{16} = 1)$ $\therefore$ கரு கரு (1×1) மாற க ஆவது (1 ஆவது)-ப ($= \frac{1}{20}$ = ஒருமா) ஆதலால் ᐳசா ரு ᐳசா ரு-ப = ($\frac{1}{20}$ = மா = ஒருமா)-என்பது.

ந௰உ (32) ரு ந௰உ (32) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—ந௰உ ரு ய: உ $(32 \times \frac{1}{16} = 2)$ மத்த—ந௰உ ரு ய: உ $(32 \times \frac{1}{16} = 2)$ $\therefore$ உரு உரு (2×2) மாற-ச-(4) நாலாவது-ச (4) (நாலுமா = சப) என்பது.

இப்படிச் சரி லக்கமாக வந்தால் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும். இனி விட்டேறு லக்கமாக யேறுவகை வந்தால் மாறிச் சொல்லுகிற வகை:—

கீள் மேல்—உ௰ச (24)க்கு தென் வடல்-சா௰ச (64) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்:— உ௰ச (24)யும்-ய ($\frac{1}{16}$)ல் தாக்க-கஇ ($1\frac{1}{2}$). சா௰ச (64)யும்-ய ($\frac{1}{16}$)ல் தாக்கி-ச (4) என்று வைத்து:— க இ ரு ச ($1\frac{1}{2} \times 4$ ரு) மாற—சா (6):— சா-ஆவது சா (6) ப (ஆறுமா) என்பது.

ச௰அ (48) ரு-அ௰ (80) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—ச௰அ ரு-ய-தாக்க ங = $(48 \times \frac{1}{16} = 3)$; அ௰ (80)யும் ய ($\frac{1}{16}$)ல் தாக்க-ரு (5); ங ரு ரு ரு மாற $(5 \times 3 = 15)$ = ௰ரு (15) (பதினஞ்சுமா) $\therefore$ ச௰அ ரு அ௰ ரு (நில) ௰ரு (15) ப (மா) என்பது. இப்படி யேறு வகையாக வந்தால் ப = (மா) பார்த்துச் செல்லவும்:—

யேறுவகை தப்பாகவந்தால் ஒரு துகையை—ய=($\frac{1}{16}$)யில் களித்து அதை மத்த ஒரு துகையுடனே மாறி திரும்ப வூ (மூந்திரிவாயில்) யில் களித்து நிலம் சொல்லுகிற வகை:—

கீ (4) ச ரு தென்மீ-௰ (10) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்-ச (4)யும் (ய = $\frac{1}{16}$) வாயில் தாக்க — வ ($\frac{1}{4}$). இதனை — ௰ (10)ல் மாற — உஇ ($2\frac{1}{2}$) இதனை-வூ ($\frac{1}{320}$)யில் களிக்க-ഥ கீ இ = $(\frac{1}{160} + \frac{1}{640} = \frac{5}{640} = \frac{1}{128})$ யென்பது.

அ (8) ரு-உ௰ரு (25) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்-அ: ய: இ $(8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2})$ இதை உ௰ரு (25)ல் மாற — ௰உஇ ($12\frac{1}{2}$). இதை-வூ ($\frac{1}{320}$)யில் களிக்க — சூகீ இ $(\frac{5}{128} = \frac{3}{80} + \frac{1}{640})$ யென்பது.

ச௰ (40) ரு கூ௰ (90) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—ச௰ (40)ஐ—ய ($\frac{1}{16}$)ல் தாக்க-உஇ ($2\frac{1}{2}$), இதுவுடனே-கூ௰ (90)யை மாற-உ௱உ௰ரு (225), இதை வூ ($\frac{1}{320}$)யில் களிக்க—[இவு ய஖ூ = அரையேரிக்காலே மாகாணி (கால்வீசம்) காணி முந்திரி] $(\frac{225}{320} = \frac{45}{64})$ யென்பது.

௩௰௨ (32) ரூம்-௬௰௫ இ௷ $(45\frac{5}{8})$ ரூ நிலம் யெத்தனை யென்றால்:— ௩௰௨ (32)ஐ — ௰ $(\frac{1}{16})$ல் தாக்க —௨ (2). இதுவுடனே—௬௰௫இ௷ $(45\frac{5}{8})$ஆ மாற — ௯௰௧வ $(91\frac{1}{4})$ இதை வ௲ $(\frac{1}{320})$யில் கழிக்க — ௫மா. ௬௰வ௲ௗ எ. [அதாவது - (5 மா + $\frac{45}{64}$ மா) = $(5\frac{45}{64}$ மா) நிலம்] என்பது

கீழ்மேல் தென்வடல் ரெண்டும் மாறின துகை குழி—அதை—௰=$(\frac{1}{16})$யில் தாக்க — க௫. அதை-வ௲-யில் களி(ழி)த்தால் கண்டது சொல்லவும்.

இதில் க-க-௫ ஆயிறம் கண்டால் ஆயிறமும் வ௲—யில் களிக்க ௩௷ $\left[\left\{\frac{1}{320}\times 1000 = 3\frac{1}{8}\right\} = \left\{\frac{25}{8}\right\}\right]$. இதை க (1) ரூ இருவது மாவல்லோ (மாவல்லவா). அந்த-ப-௨௰ (20)ல் பெருக்க-௬௰௨இ $(62\frac{1}{2})$. இதனை திரும்பவும்—மா—படித்த—௬௰௨மா—௬ —(௬=அரைமா) யென்று சொல்லவும்.

கனத்தை சில்வானப் படுத்தவும், சில்வானத்தை கனப்படுத்தவும் வகை.

௰௨௱௲ (பன்னிரெண்டு நூறாயிரத்துக்கு) ரூ ௩௲௭௱௫௰ (3750) குடுக்க வென்றால் எண்சுவடி யன்றியேது. கயிலேசரி சொல்லும் வகை.

மகாமேருவாகிய — ௰௨௱௲ (பனிரண்டு லக்ஷம் = 1200000) இதை சில்வானப்படுத்த.

௰௨௱௲ = (1200000) = (12 லக்ஷம்)
௱௨௰௲ = (120000) = (லக்ஷத்திரவதாயிரம்)
௰௨௲ = (12000) = (பனிரண்டாயிறம்)
௲௨௱ = (1200) = (ஆயிறத்திருநூறு)
௱௨௰ = (120) = (நூத்திருபத்து)
௰௨ = (12) = (பன்னிரண்டு)

என்று ஆருஸ்தானம் கொண்டு நிருத்தி மத்த ௰—௩௲௭௱௫௰ = (3750)யும் அந்தப் படியே ஆருஸ்தானத்திலே (இப்படி).

௩௲௭௱௫௰ = 3750
௩௱௭௫ = 375
௩௰௭இ = $37\frac{1}{2} = 37\cdot 5$
௩௸ = $3\frac{3}{4} = 3\cdot 75$
வ௷ = $\frac{3}{8} = 0\cdot 375$
௬ூ (முக்காணி) = $\frac{3}{80} = 0\cdot 0375$

நிருத்தி—என்று வைத்து—முன்னிருத்தின பேருக்கு—௬ூ $(\frac{3}{80})$ ஈய (கொடுக்க)

௰—௰வ௲—௬—௨வ௲ரி—ஆ—௬ூ—ஆதலால்-௰௨௱௲-பேருக்கு ௩௲௭௱௫௰ குடுக்க ஈய்வு வ௲ முந்திரி $(\frac{3750}{1200000} = \frac{1}{320} =$ வ௲) என்பதாம்.

மற்றும் வந்தன வெல்லா மிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

குள் வெட்டளவு வருமாறு:—

கீள் மேல்-ச (4) ரு தென் மடல்-ச (4) ரு மட்டு-கரு-மட்டு-யெத்தனை யென்றால்:—சரு சரு (4×4) மாற—யசு (16) இதில் மட்டு-க (1)ல் களிக்க—ய-க:ய — சு க சு — ஆ — யசு $= [(10 \times 1 = 10) + (6 \times 1 = 6) = (16)]$ இதனை—ய $(\frac{1}{16})$யில் — ய ய. இஅ — சு-ய: வஅ $= [(10 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{8}) + (6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}) = (1)]$ ஆ மட்டு க—இப்படிச் சொல்லுகிற வகையைச் சுருக்கமாகச் சொல்லுகிறதற்கு விபரம்:—

கீழ் மேல் ச (4) ரு தென்மீ-ச (4) ரு மட்டு—க (1) ரு-மட்டு எத்தனை யென்றால்:—ச (4) (ரு) — ய $(\frac{1}{16})$யில் களிக்க :— ச ய: வ $(4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4})$, மற்ற—(4)யும் மட்டில் களிக்க—ச-க: ச $= (4 \times 1 = 4)$ இதனுடனே முன்னிருத்தின — வ $(\frac{1}{4})$ மாற-ச-வ: க $(4 \times \frac{1}{4} = 1)$; ஆதலால் கீ ச ரு தென்மீ சரு மட்டு-க-ரு $(4 \times 4 \times 1)$க்கு மட்டு க (1) யென்பது.

கீ—அ (8) ரு தென்மீ-யரு (15) ரு மட்டு-ஜ $(\frac{3}{4} = 0{\cdot}75)$ரு-மட்டு-யெத்தனை யென்றால் :—கீள் மேல் (8) அ-யும் மட்டு ஜ $(\frac{3}{4})$யில் களிக்க-அ ஜ: சு $= (8 \times \frac{3}{4} = 6)$ இதனை-ய $(\frac{1}{16})$யில் களிக்க — சு-ய: வஅ $(6 \times \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8})$ யென்று வைத்து. தென் வடல் — யரு (15)டனே மாற ய-வ: உஇ $= (10 \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2})$; ய அ: கவ $= (10 \times \frac{1}{8} = 1\frac{1}{4})$; ரு-வ: கவ $= (5 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4})$; ரு அ: இஅ $= (5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8})$ ஆ ரு இஅ $= (5\frac{5}{8})$. ஆதலால் கீ-அ ரு தென் மடல் யரு ரு மட்டு ஜ ரு—மட்டு ருஇஅ $(5\frac{5}{8})$ யென்பது.

கீள் மேல் உயச (24) க்கு தென்மடல்-(32) கூயஉ-ரு-மட்டு-இஅ $(\frac{5}{8})$ரு மட்டு எத்தனை யென்றால் :—தென் படல்-கூயஉ (32)ம் மட்டு-இஅ $(\frac{5}{8})$னும் மாற :—கூய-இ: யரு $(30 \times \frac{1}{2} = 15)$; உ-இ: க $(2 \times \frac{1}{2} = 1)$, கூய-அ: கூ ஜ $(30 \times \frac{1}{8} = 3\frac{3}{4})$, உ-அ: வ $(2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4})$ஆ-உய (20) என்று வைத்து-உயச (24)யும் — ய $(\frac{1}{16})$யில் மாற — உய-ய: க வ $(20 \times \frac{1}{16} = 1\frac{1}{4})$, ச-ய: வ $(4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4})$ஆ கஇ $(1\frac{1}{2})$ இதனுடனே முன்னிருத்தின-உய (20)யு மாற-உய-க-உய; உய-இ: ய; ஆ கூய $= (20 \times 1\frac{1}{2} = 30)$;: ஆதலால் கீ-உயச ரு-தென்மீ-கூயஉ-ரு மட்டு இஅ ரு மட்டு ஷை-கூய (30) யென்பது.

மத்தும் இப்படி வந்த இனத்துக்கெல்லாம் ஒருகை கோலே-மாகாணி $(ய = \frac{1}{16})$யில் களித்து, ஒருகை கோலே-மட்டில் களித்து ஒன்றொன்று (ஒன்றுக்கொன்று) பெருக்கிச் சொல்வது.

பின்னையும் ஒருவகை :—

ஒருகை கோலே மாகாணி $(ய = \frac{1}{16})$யில் கழித்து ஒருகை கோலுடனே பெருக்கி மட்டில் களித்துச் சொல்வது.

இதில் விரித்துக் காட்டல் :—

கீ-சுயிச (64)ரு தென்மீ-உயிஎ இ ($27\frac{1}{2}$)ரு—மட்டு—வ ($\frac{1}{4}$)ரு மட்டு எத்தனை யென்றால்:—

சுயிச (64)யும் — ய — யில் கழிக்க — ச (4). இதனை தென்படல் :— உயிஎஇ ($27\frac{1}{2}$)யுடனே மாற:—உயி·ச: அயி—எ·ச: உயிஅ—ச·இ: உ ($27\frac{1}{2} \times 4 = 110$) ஆ—ாயி—மட்டு—வ ($\frac{1}{4}$)லில் களிக்க — ா·வ: உயிரு — யி·வ: உஇ ஆ உயிஎஇ ($110 \times \frac{1}{4} = 27\frac{1}{2}$) ஆதலால் கீள் மேல்—சுயிச—ரு தென்மட்டல் உயிஎஇ ரு மட்டு—வ—ரு மொத்த மட்டு உயிஎஇ ($27\frac{1}{2}$) என்பது. மறுபடி வந்ததெல்லாம் யிப்படிக் கணக்கு· சொல்லவும்.

விருத்தம் :—

ஆதியொன்று முதலன்பதின் வரை—
சேதி யாந்துகை செப்பிடில்; பத்தஞ்சை—
பாதி செய்தறைப் பங்குடன் கூட்டி முன்
னீதியானது ரெற்றினச் சுருக்கமே (4)

படி யடித் துகை யாதென்றால்:—.

ஒன்று முதல் யி (பத்து) மட்டும் நடத்த வருகிற துகை யெத்தனை யென்றால் (அதாவது ஒன்று முதல் பத்துவரையில் கூட்டிய துகை $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = ? =$ என்னவென்றால்):— பத்துடனே ஒன்று கூட்ட—யிக (11) இதில் பாதி ருஇ ($5\frac{1}{2}$) முதலான பத்துடனே பெருக்க துகை—ருயிரு $=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10 \times 11}{2} = 5 \times 11 = 55)$. ஆதலால் ஒன்று முதல்—யி—(10) மட்டுந் துகை ருயிரு (55) என்பது, (1).—

ஒன்று முதல் னூறு மட்டுந் துகை யெத்தனை யென்றால்:— நூறுடன்— க (1) கூட்ட ாக (101). இதில் பாதி ($50\frac{1}{2}$) = ருயிஇ; இதனை ா (100) உடனே மாற—ருசுருயி (5050) $= (1+2+3+ \dots\dots\dots \dots\dots\dots\dots + 100.$ மட்டும்) கூட்டிய துகை $= \frac{100 \times 101}{2} = 55\frac{1}{2} \times 100 = 5050)$ $\therefore$ ஆதலால் நூறு மட்டும் துகை—ருசுருயி (5050) என்பது. மத்தும் வந்தன வெல்லாம் இப்படிப் பார்த்துச் சொ(ல்வது)ன்ன முதலிலே மேல்—(க)—கூட்டிக் கண்டதில் பாதியும் முதலும் மாறக் கண்டது துகை யென்று சொல்லவும்.

(இதன் ஸம்பந்தமான இன்னுஞ்சில விசேஷங்களை முன்னுரையில் பார்க்கலாம்):—

எ(ண்)ஞ் சுவடி அலகு நிலை வருமாறு :—
ஓதிவாயி லொருவாய்(த்) துகை தனை—
ஆறினல் மாறி அமர்ந்திருந்த வப்பொருளை—
அஞ்சிலாய பயன்களை யத்தென்று—
(ே)மது—ஞ்சாதலகு நிலை சொல் (5)—

இதனை விறித்துக் காட்டல்:—

வாய்முதல்—ா—உா—(100—200) மட்டுந் துகை யெத்தனை யென்றால்:— உா (200)யும் சு (6)ல் பெருக்க—உா'சு; கூ உா ($200 \times 6 = 1200$) என்று வைத்து அதில் — ரு'உ: ம = ($5 \times 2 = 10$) தள்ளி நீரு—கூாகூம (1190), என்பது.

—வுத—வாய்க்கு— க'வுத'வுத — முதல் கூ'(வுத): ௩ஞு = ($\frac{1}{320}$ — வாய்க்கு — $1 \times \frac{1}{320} = \frac{1}{320}$ முதல் $1000 \times \frac{1}{320} = 3\frac{1}{8}$) மட்டுந் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

௩ஞு ($3\frac{1}{8}$)ஐ ஆறில் மாற—சு'௩: மஅ: சு'ஞு: ஜ— ஆு மஅ ஜ = ($6 \times 3\frac{1}{8} = 18\frac{3}{4} = 18{\cdot}75$) இதில் . . . . உவுத—தள்ளி நீக்கி—மஅஇ சபுசு ஙிவுத $= (18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{40} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 18\frac{235}{320} = 18\frac{47}{64})$ ∴ ஆகலால் வுத ($\frac{1}{320}$). வாய்க்கு அலகு நீல மஅ இ சபுசு ஙிவுத ($= 18\frac{47}{64}$) என்பது; மத்தும் வந்தன வெல்லாம் இப்படிப் பார்த்துச் சொலலவும்.

இனிமேல் விசேஷமாக குறுக்கே முறிச்சுக் கேட்டால் சொல்லுகிறவகை விபரம்.

விருத்தம்:—

சொல்லிய எண்சுவடி வாயளதோறும்—
துகை முறிச்சுத்தான் கேழ்க்கச் சொல்லக் கேளிர்;
வல்லவர்கள் சொன்ன லெக்கம் தனைத் தானத்தில்,
வாகாக நிருத்தி றெற்றினச் சுருக்கந்தாக்கும்,
நல்லதுகை யேற்றான நடத்திக் கூட்டி நவின்றுவரும்—
வாயளா தன்னில் நாட்டு விராய்,
ல(வ)ல்லூரர் நிரைந்து மட்டுந்தான்—
ஆமிரண்டுக் கப்பாலே மூமு(ன்)றுருக் தானே = (6).

இதை விறித்துக் காட்டல்:—

க'ரு:ரு ($1 \times 5 = 5$) முதல். அம'ரு: சா ($= 80 \times 5 = 400$) வறைக்குந் துகை யெத்தனை என்றால்:—

அம (80)ரு. இனம் — அ (8) என்று வைத்து — அ (8) மட்டும் மாறினச் சுருக்கம் படியடித்து கை — ௩மசு $\left(\frac{8 \times 9}{2} = 36\right)$. இதை ரண்டுத்தானம் நடத்த — ௩மசு — ௩ாசும = ($36 - 360$) இதை முன் துகை ௩மசு (36)ங் கூட்ட முன்னாத்தித் தொண்ணூத்தாறு (௩ாகூமசு = 396). இதை யிந்த வாயாகிய ரு (5)ல் மாற ௩ா'ரு: கூருா; கூம'ரு: சாரும; ரு'சு: ௩ம— ஆு கூகூாஅம ($= 396 \times 5 = 1980$). ஆதலால் — க'ரு: ரு-முதல்-அம'ரு: சா—வரைக்கும் துகை—கூகூாஅம (1980) என்பது. இந்தப்படி முதல் வாய் முதல் பத்து வாய் மட்டும் பார்த்துச் சொல்வது.

அப்பால்—வீசம்—வாய்முதல் தூணி வாய் மட்டுக்குந் தானம் வருமாறு :—

க·ஙி: ஙி $(1 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{160})$ முதல் ருா ஙி: ௩ஒ $(500 \times \frac{1}{160} = 3\frac{1}{8})$ மட்டுந் தொகை யெத்தனை யென்றால் :—

ருா (500)ரு இனம் ரு $(= 5)$ என்றறிந்து-ரு (5) மட்டும்மாரிச் சுருக்கத் தொகை கூட்ட (வந்த) சுருக்கத் தொகை (படிப்படிப்படி) — ௰ரு = $\left(\frac{5 \times 6}{2} = 5 \times 3 = 15\right)$ இதனை ருா-யும்-ரு ஆக கிருத்தினால்தானம் (௩ $= 3$) மட்டும் நடத்த — ௰ரு — ளரு௰ — ௲ரு — ஆக கூட்டின தொகை —௲ளாள௰ரு (1665) இதனை பிறந்தவாகிய—ஙி $(\frac{1}{160})$—வாயின் கூறிக்க—௰·ஙி: கூவ; ளா ஙி: ௩ஜ; ௰·ஙி: வஒ, ரு ஙி: க ஙி-ஆக = ௰வ ஙிஙி = $(1665 \times \frac{1}{160} = 10 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{160} = 10\frac{13}{32})$. ஆதலால் — க·ஙி: முதல் — ருா ஙி: ௩ஒ — மட்டுந் தொகை = ௰ வஙிஙி $(10\frac{13}{32})$ என்பது.

மற்றும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிக் கண்டு சொல்லவும் :—

வீசம் $(\frac{1}{320})$ முந்திரி வாய் முதல்-ப $(\frac{1}{16})$ மாகாணி (வீசம்) வாய் மட்டும்— சா (400) வரைக்குந் தொகை யெத்தனை யென்றால் :—

சா (400)ரு இனம் = ச (4) என்று வைத்துக் கொண்டு — ச (4) வரைக்கும் படிபடித்தொகை கூட்ட $\left(\frac{4 \times 5}{2} = 10\right)$ = ௰. இதனை மூன்றாம்மட்டும் நடத்த·௰ = (10) — ௱ = (100) — ௲ = (1000). ஆக

௲௱௰ = (1110) என்று கண்டு — பிறந்தவாயாகிய — வீசம் — வாய்முதல் — ய — வரைக்குந்தொகை கூட்ட — வீசம் — ஙி — இ — க — சூ — ப — ய = ஙி சூ ஙிவீசம் $= (\frac{1}{320} + \frac{1}{160} + \frac{1}{80} + \frac{1}{40} + \frac{3}{80} + \frac{1}{20} + \frac{1}{16} = \frac{3}{20} + \frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = \frac{63}{320})$ இதனுடனே முன்னிருத்தின — ௲௱௰ (1110)ம் மாற — ௲·ஙி: ௱ரு௰ $(1000 \times \frac{3}{20} = \frac{3000}{20} = 150)$; ௱·ஙி: ௰ரு $(100 \times \frac{3}{20} = 15)$; ௰·ஙி: கஇ $(10 \times \frac{3}{20} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2})$ ௲ சூ: ௩௰இ $(1000 \times \frac{3}{80} = 37\frac{1}{2})$; ௱ சூ: ௩ஜ $= (100 \times \frac{3}{80} = 3\frac{3}{4})$; — ௰·சூ: வஒ $(10 \times \frac{3}{80} = \frac{3}{8})$; = ௲·ஙி: கூவ, ௱ ஙி: இஒ; ௰ ஙி: ய = $(1000 \times \frac{1}{160} = 6\frac{1}{4}, 100 \times \frac{1}{160} = \frac{5}{8}, 10 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{16})$; ௲ வீசம்: ௩ஒ, ௱·வீசம்: வய, ௰·வீசம்: கூ $(1000 \times \frac{1}{320} = 3\frac{1}{8}, 100 \times \frac{1}{320} + \frac{5}{16} = 10 \times \frac{1}{320} = \frac{1}{32})$ ஆக — உ௱௰அ இ க ஙி = $(218 + \frac{1}{2} + \frac{1}{40} + \frac{1}{160} = + \frac{85}{160} = + \frac{17}{32})$ ஆதலால் — வீசம் — வாய் முதல் — ய — வாய் மட்டும் — சா — வரைக்குந் தொகை — உ௱௰அஇகஙி $(218\frac{17}{32})$ என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

பெருங்குளி(ழி) மாகத்துக்குத் துகை வருமாறு :—

விருத்தம் :—

புரிந்த பெருங்கு(ழி)ளி மாற்றின் துகைதானின்னு
(று),(ம்); புலவோறை ஒன்று முதலீரைந்தாக வருந்துகை தானீர்
தெரிய வல்லீராகில்; வளுத்திடய(அ)ைதனில்
(பா)மாறி வைத்நீரை—அதிலத்திருந்தவே
நடுக்கூட்டி சீனந்துகையால் தாக்கி(ச்)
செப்பியவை ரண்டுக்கு மந்திரமாய் நாளும்,
இருந்தபடியடி கூட்டி மூவர்க்கீயந்து—
இன்னதென்று வருங்குளி(ழி) வாயுமியம் புவீரே(7);

இதை விரித்துக் காட்டல் :—

கரு'க — க — குழி (1 × 1 = 1 குழி) முதல் — ⅩருⅩ — குழி Ⅹ'Ⅹ: ⅩⅩ (10 × 10 = 100) வரைக்கும் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

-Ⅹ-ஐ-தன்னில்மாற-ⅩⅩ-(10 × 10 = 100) என்று நிருத்தி — Ⅹ — உடனே — க— கூட்ட—Ⅹக (10 + 1 = 11) — இதனை முன்னிருத்தின—ⅩⅩ—உடனேமாற—ஹⅩⅩ (100 × 11 = 1100) என்று வைத்து இதுடனே—Ⅹ = (10) வறைக்கும் படியடித் துகை ருⅩரு (55) கூட்ட—ஹⅩருⅩரு (1155) இதனை—ந. (3)ருக் குடுக்க ஈய்வு — நⅩஅⅩரு = (385) = ($\frac{1155}{3}$). ஆதலால் — Ⅹரு'Ⅹ — குழி நⅩஅⅩரு (385) என்பது :—

க (1) முதல் உⅩரு (25) வறைச்சும் துகை எத்தனை யென்றால் :— உⅩரு (25)யுந் தன்னுல்மாற — சுⅩஉⅩரு (625 = 25 × 25); என்று நிருத்தி—உⅩரு (25) உடனே—க—(1) கூட்ட — உⅩசு (26). இதனை முன்னிருத்தின — சுⅩஉⅩரு (625)ல் மாற—சுⅩ உⅩ: Ⅹஉஹ (600 × 20 = 12000); சுⅩ'சு: நஹசுⅩ (600 × 6 = 3600); உⅩரு உⅩ: சⅩ (20 × 20 = 400); — உⅩ'சு: ⅩஉⅩ (20 × 6 = 120); உⅩ'ரு: ⅩⅩ (20 × 5 = 100); சு'(ரு): நⅩ (6 × 5 = 30): ஆக — ⅩசுஹஉⅩருⅩ (16250); யிதுடனே — உⅩரு (25) வறைக்கும் படியடித் துகை கூட்ட — (வருவது) ⅩசுஹருⅩஎⅩரு [(16575) = (25 × 26 × $\frac{1}{2}$ = 325; + 16250)]. இதனை-ந—(3)ருக் குடுக்க ஈவு. ருஹருⅩஉⅩரு = [(16575 × $\frac{1}{3}$) = (5525)] என்பது.

மத்தும் வந்தனவெல்லா மிப்படிக் கண்டு கொள்வது.

(வேறு)

முத்துகை வினு வருமாறு :—

விருத்தம்:—

பன்னிரண்டு படி நெல் முக்கால்பணமென்ன
வெண்கலமெத்தனைப் பொன் னென்னில்
அது தன்னதாய் நடுவுங்கடையுந் தாக்கியே
முன்னமீய்ந்து மொளியுங் கணக்கிதே "(8)" என்பது :—

நெல் படி—யல (12)க்கு விலை பணம்—ஷு ($\frac{3}{4}$)ல் ஆனூக — அள (8) கலத்துக்குரு (பணம்) எத்தனை யென்றால் :—

அள மும் (8கலமும்) ஞளிப் படுத்த - எா௨ய (720) இதை நடுவாகிய-ஷு ($\frac{3}{4}$)—வில்—மாற நூாசய (540) இதை முதலாகிய—யல (12)ருக் குடுக்க ஈய்வு—சயரு (45).

ஆதலால் :— படி—யல (12)ரு விலை ப — (பணம்). ஷு ($\frac{3}{4}$)ல் ஆனூ-அள (8 கலத்து)ரு — சயரு (45) பண மென்பது.

மத்தும் வந்தனவெல்லாமிப்படிக் கண்டு சொல்வது :—

இதில் மத்து மோர் இனம் வருமாறு :—

முதலுங் கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக்குடுக்கிறவகை :—

விரித்துக்காட்டல :—

- விருத்தம் :—

ஆறரை பணத்துக்கு அறுநூறு தான்தேறு
காகிரண்டாயிறத் தெட்டறைக்காகவே
விலைமுன் கண்டு கொண்டு தான்
மாறியே நடுவாக விள(க்)குவீர்———— ——— (9) என்பது—

சூஇ ($6\frac{1}{2}$) ப - (பண)ரு—சூா (600) கூ ஆனூ உகூஅஇ ($2008\frac{1}{2}$)ரு கூ எத்தனை யென்றால்:—

முதலாகிய ($6\frac{1}{2}$) சூ இ -யும் கடையாகிய - (உகூஅஇ) இரண்டாயிறத் தெட்டறை ($2008\frac{1}{2}$)யும் பெருக்க — யகூகூருயரு வ ($13055\frac{1}{4}$) இதை நடுவாகிய—சூா (600)க்கிய ஈய்வு :—

உயக ஷு ஙி கீ ஷுப = $[(21 + \frac{3}{4}\ \frac{1}{160} + \frac{3}{1280} + \frac{1}{6400}) = (21 + \frac{3}{4} + \frac{1}{160}) + (\frac{16}{6400} = \frac{1}{400}) = (21 + \frac{3}{4} + \frac{1}{160} + \frac{1}{400} = (21\frac{3}{4}) + \left(\frac{40 + 16 = 56}{6400}\right) = (21\frac{3}{4} + \frac{7}{800}) = (21\frac{607}{800})]$. ஆதலால்:—

சூ இ ($6\frac{1}{2}$) ப— ரு கூ சூா (600) ஆனூ உகூஅஇ ($2008\frac{1}{2}$) ரு-உயக ஷுஙி(யும்) கீ ஷுப = ($21\frac{607}{800}$) என்பது.

(இந்த மாதிறியையே இன்னும் பின்னத்தில்):—

ஷுரூ ($\frac{15}{16}$) பேருக்கு-ஙய (30) ஆனூ :— கூஅாயஅ (1818)ரு. யெத்தனை என்றால் :—

கூஅாயஅ (1818)யும் ஷுரூ ($\frac{15}{16}$) (ஆல்) பெருக்க—கூஎாசவஷு ($1704\frac{3}{8}$) இதை நடுவாகிய—ஙய (30)ருக் குடுக்க ஈவு = ருயசூ ஷுய (= $56\frac{13}{16}$) என்பது மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிக் கண்டு சொல்லவும்.

(வேறு)

ஐந்துகை விகற்பம் வருமாறு:—

விருத்தம்:—

நால்ணுக்கு கொண்ட அடிக்கோலினலே-
    நவின்ற குளி(ழி) நூறு, மறுணன்கதாக
(அறு ணன்கதாக) வேணுணுக்கு
    சோலதனல், குளி(தானென்னில்), யாதென்னில்
விரான முத்துகையைத் தன்னல் மாறி
    யானலே யதனுடனே நூறைத் தாக்கி.
அறிவுடையீர் கடைசியறுணன்குதன்னை
    தாணுகு கு(ழி)ளிமாறி இதனுக்கு முன்-
தரூந்துகையை தானீய்ந்து சாற்று வீரே (10)

என்பது:—

(16) ௰௬-டிக் கோலால் குளி-௱ (100)க்கு (24) ௨௰௪-டிக் கோலால் குழி யெத்தனை யென்றால்:—

௰௬ (16)யுந் தன்னால் மாற—௨௱௫௬ ($256=16 \times 16$); இதை ௱ (100)ல்-பெருக்க-௨௰௫௲௬௱ (25600). இதை நிருத்தி; கடைசியாகிய-௨௰௪ (24)யுந் தன்னால் மாற-௫௱௭௬ ($24^2 = 576$) இதற்கு முன்னிருத்தின-௨௰௫௲௬௱ (25600)யுங் குடுக்க:—

(இதற்கு விபரம்):—

௫௱-௪௰: ௨௰௲ ($500 \times 40 = 20000$);
௭௰-௪௰: ௨௲௮௱ ($70 \times 40 = 2800$);
௪௰ ௬: ௨௱௪௰ ($40 \times 6 = 240$);

௫௱-௪: ௨௲ ($500 \times 4 = 2000$)-
௭௰-௪: ௨௱௮௰ ($70 \times 4 = 280$)-
௬-௪: ௨௰௪ ($6 \times 4 = 24$)-

௫௱-வ: ௱௨௰௫ ($500 \times \frac{1}{4} = 125$)-
௭௰-வ: ௰௭ இ ($70 \times \frac{1}{4} = 17\frac{1}{2}$)-
௬-வ: ௧ இ ($6 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$)-

௫௱-ஙி: ௭௰௫ ($500 \times \frac{3}{20} = 75$)
௭௰-ஙி: ௰ இ ($70 \times \frac{3}{20} = 10\frac{1}{2}$)-
௬-ஙி: ஜஙி ($6 \times \frac{3}{20} = \frac{9}{10}$)-

௫௱-ஙீ: ௩ஞ ($500 \times \frac{1}{160} = 3\frac{1}{8}$)-
௭௰-ஙீ: வஸ ($70 \times \frac{1}{160} = \frac{7}{16}$)-
௬-ஙீ: சஞ ($6 \times \frac{1}{160} = \frac{3}{80}$)-

௫௱-வஹ: ௧இய ($500 \times \frac{1}{320} = 1\frac{9}{16}$)-
௭௰-வஹ: கஉப ($70 \times \frac{1}{320} = \frac{7}{32}$)-
௬-வஹ: ஊப ($6 \times \frac{1}{320} = \frac{3}{160}$)-

ஆக ௨௰௫௲௬௱ (25600)ம் சரி-

(இவ்விதம் சொல்லும் வழி இவ்வளவு விஸ்தாரமடைகின்றது.)

ஆதலால் ஈய்வு - (சமிச வஙிரிவது:) என்பது ஆகையால் - மகூ (16) அடிக் கோலால் குழி ՠ (100)ரு-உமிச (24)டிக் கோலால் குழி — சமிச வஙிஉரிவது என்பது.

குறிப்பு :—இங்கே மேற் சொன்ன கணக்கில் விடை இருவிதமாகச் சொல்லப் பட்டிருக்கிறது-ஷை இரண்டு விடைக்கும் விலோமகணிதத்தால் முன் குழி (100) என்பது வரவில்லை ஆனாலும் ஷை இருவித விடைகட்குப்பதிலாக (இங்கு — சமிச வஙிசூரிவது-) என்று விடையைக் கொண்டால் ஷை இரு விடைகளைப்போல் அவ்வளவு பெரும் பிழையாக ஏற்படவில்லை - (+ $\frac{7}{1280}$) இவ்வளவு தான் வித்யாசப் படுகின்றது. (கணிதப் பெருக்கால் பிரமையால் மூலப்பொது வழியி லும் இந்த [சூஉ = $\frac{3}{80}$] முக்காணி கணிதமும் விடப்பட்டது) என்பது உணர வேண்டியதவசியம்.

ஷை — சமிச வஙிசூரிவது — என்பதை சரிதான் என்று நிரூபித்தல்:— விவரணமிங்கு :—

மேலே கூறப்பட்ட விடைகள்

(1) சமிச வஙிரிவது $= (44 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{131}{320})$;

(2) சமிச வஙிஉரிவது $= (44 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{135}{320})$;

(3) சமிச வஙிசூரிவது $= (44 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{143}{320})$;

இவ்விதமாகும்.

இனி இந்த மூன்றுவித விடைகளில் எது மிகவும் சமீபத்தில் சரியாகும் என் பதை நிச்சயிக்க விலோம கணித விவரணம்-கீழ்.

$\because (\frac{16}{24})^2 = \frac{256}{576} = \frac{4}{9} \therefore$

(1) $44\frac{131}{320} \times \frac{9}{4} = 99\,\frac{1179}{1280}$

(2) $44\frac{135}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1215}{1280}$

(3) $44\frac{143}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1287}{1280}$

என்றேற் படுவதால் :—

குழி - 100 —க்கு—

முதல் விடை வித்தியாசம் $= (- \frac{101}{1280})$

இரண்டாம் விடை வித்தியாசம் $= (- \frac{65}{1280})$

மூன்றும் விடை வித்தியாசம் $= (+ \frac{7}{1280})$

இவ்விதம் போன்ற கணிதத்திற்கெல்லாம் மிகவும் குறைந்த சமீப வித்யா சத்தை எந்த விடை தருகிறதோ அதையே எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும் என் பது கணிதப் புலவர்களின் துணிவு. ஆகையால் இந்த விஷயத்தை மகான்கள் அவசியம் கவனிக்க வேண்டியது.

4

இவ்விஷயத்தில் பாஸ்காராசாரியாதிகளின் ப்ரமாணவழி :—

தெரிந்தவைகள் :—

ஓர் கோல் = 16 அடி. மற்றொன்று = 24. நிலக்குழி விஸ்தீர்ணம் = 100ம் 16 அடிக்கோலுக்கு ∴ ஷை 100 குழி 24 அடிக்கோலுக்கெவ்வளவு என்பது கேள்வியும் தெரிய வேண்டியதும். :—

$$100 \times \left(\frac{16}{24}\right)^2 = 100 \times \frac{16 \times 16}{24 \times 24} = 100 \times \frac{256}{576} = 100 \times \frac{4}{9} =$$

$\frac{400}{9} = 44{\cdot}44444 = 44{\cdot}44444444 \ldots\ldots$ என்பதாகும் : ஆனாலும் இவ்வித கணிதங்கள் எப்போதும் முடிவையே அடையாது (அதாவது மிச்சமின்றியிராது) ஆகையால் வேண்டிய வரையில் சூக்ஷ்மத்தைக் கணித்துத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

இவ்விதம் ஏன் கொள்ளவேண்டியதென்றால் (ஸூக்ஷ்ம முதலிய) பின்னம் என்பது இஷ்டம்போன்ற எல்லைக் குட்பட்டது. க்ஷேத்ரரூதி கணிதங்களோ இஷ்டத்தை மீறியதும் எல்லையற்றதும் என்பதும் உணர்க.

மேலும் ஷை குழி $= 44{\cdot}4444444 - \ldots >$ என்பதின் $= 44\frac{444{\cdot}44444}{1000000000}\cdots$ இந்த $\left(\frac{4444}{10000}\right)$ குழியை பூர்விகர்களால் ஏற்படுத்திய கடைசியளவு (சுமார்) $\frac{1}{320}$ முந்திரியால் பெருக்கிய $= \frac{4444}{10000} \times 320 = 142{\cdot}22$ ஆகையால் முன் சொன்னது போல் குழி $= 44\frac{142}{320}$. இதையும் முன் போல் விலோம கணிதம் செய்ய $44\frac{142}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1278}{1280}$. இங்கும் குழி 100க்கு $\left(\frac{-2}{1280} = \frac{-1}{640}\right)$ வித்யாசம் வருவதைக் கவனிக்கவேணும்.

இவ்விதம் நேரும் இடமெல்லாம் யுக்தியால் இவ்விதம் ஊகித்துக் கொள்ள வேண்டியதே முடிவாம்.—

இவ்வித வழிக்கு பாஸ்காராதிகளின் மூலஸூத்ரம் :— இம்மாதிரி கணிதங்கட்குப் பொதுவாக:—

இங்கு தெரிந்தவை:—

விசால (வர்க்க) மாகிய க்ஷேத்ரமும் (நிலப்பரப்பும்) விசாலத்தைத் தெரிவித்த ஓர் கோலும், இதற்கே மற்றோர் விசாலத்தைத் தெரிவிக்க வேண்டிய கோலும் ஆக மூன்று உருப்புகளாம்.

இரு கோல்களின் தெரிந்த அளவு தீர்க்க (நீண்ட) ரேகையிலும் க்ஷேத்ரமோர் விசாலத்திலுமாகும். ஆகையால் இங்கு இனம் வித்யாசமாக விசாலமும் ரேகையுமாக, இருக்கிறது. மேலே தெரிவிக்கப்பட்ட இருவிதக்கோல் நீளங்களையும் விசாலமாக்க இஷ்டக் கோல்களும் க்ஷேத்ரமும் ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்ததாக ஆகின்றது. பிறகு :— "**வர்க்கத்தினல் வர்க்கந்தைப் பெருக்கி வர்கத்தினல் வகுத்த பலமும் வர்க்கமாம்**" என்கிற ஸூத்ரப்படி :— குழி தெரிவித்த கோல் வர்க்கத்தைக் குழியால்பெருக்கி, குழி தெரிவிக்க வேண்டிய கோலினுடைய வர்க்கத்தால் வகுத்த ஈவே — இஷ்ட கோலாகிய வகுத்த கோலுக்குறிய நிலப்பரப்பு (நிலத்துக்குறிய குழி) ஆகும். இந்த ஸூத்ரத்தை யனுசரித்தே மேலே உதாரணத்தில் காட்டியபடி வந்த $= (100 \times \frac{4}{9}) = 100 \times \frac{2}{5}\frac{5}{7}\frac{6}{6} = 44{\cdot}4444\ldots$ என்பது மற்றயபடி—(24)-ம் பக்கத்தில் காட்டிய ரீதியாகக் கணிப்பது காலத்தை வீணுக்குவதும்—மனக்குழப்பத்துக் கிடமும்தான் ஆகின்றது.

மேலுமந்தவழி அதோடின்றி எதை எதை எதெதெற்குக் கொண்டு நிச்சயிப்பது என்ற சந்தேகமும் வேறு உண்டாகிறது.

பின்னும் ஒருவகை வெண்பா :—

கொண்ட வடியெட்டால் குளியுமொரு
 நானூறு—கண்டகோல் குளிகாணுங்கால்,
விண்டதொரு யெட்டைசனை மாரியயன்ற குளியிர்த்தாக்கி
 தொட்ட குளிக்கீய்ந்து சரிசொல்—(11)என்பது:—

ஸமீகரணம்:—

எட்டடிக்கோலால் குழி நானூறும், கண்டதொரு கோலாலளக்கக் குழி நூறு, அளந்த கோலுக்கடி யெத்தனை யென்றால் :—

அ (8)புந் தன்னுல் மாற — ௬௰௪ (64) இதை-௪௱ (400)ல் பெருக்கக் குழி — ௨௰௫௲௬௱ (25600); திருத்தி இதை பின்கண்ட குழி ௱ (100)ரு குடுக்க ஈய்வு சரி குளிப்படுத்த-௰௬ரு·௰௬-குழி ௰ரு·௰: ௱; ௰·௬: ௬௰,—௱௬௰-, ௬·௰: ௬௰-௨௱௨௰-, ௬·௬: ௩௰௬ = ௨௱௫௰௬ (ஷை 256க்கு வர்க்கமூலம் $= (256)^{\frac{1}{2}} = 16$). ஆதலால்-அ (8)டிக் கோலால் குழி ௪௱ரு·கண்ட தொரு கோலாலளக்கக் அளந்த குழி-௱-கோலுக் கடி — ௰௬ (16) என்பது.

என்றால் :—திறைறாசிக் கணிதப்படிக்கு :—

$$\left\{ \begin{matrix} \text{(கண்ட தொரு} \\ \text{கோலின் வர்க்கம்)} \end{matrix} \right\} = \frac{\text{(எட்டடிக் கோல் வர்க்கம்)} \times \text{(நானூறு)}}{\text{(நூறு)}}$$

$= \frac{(8)^2 \ (400)}{(100)} = \frac{64 \times 400}{100} = \mathbf{256.}$ இதன் வர்க்க மூலம் $= (256)^{\frac{1}{2}}$ $= (16 \times 16)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{16.}$ என்பதால் :—

(தெரிய வேண்டிய கோலின் நீள வர்க்கம்)

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{(தெரிந்த கோல்} \\ \text{நீள் வர்கம்)} \end{matrix} \right\} \times \left\{ \frac{\text{(தெரிந்த கோலாலளந்த நிலக்குழி)}}{\text{(தெரிய வேண்டிய கோலாலளந்த நிலக்குழி)}} \right\}.$$

என்று ஸூத்ரம் இவ்விதம் பிறக்கிறது.

மற்றும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிக் கண்டு சொல்வது.

விருத்தம்:—

பத்துடனாறடிக் கோலால் குளியுமே நாப்பது தனக்குப்-
போனையந்துந்து (பொன்னைந்து) நாலாறுத்த அடிக்கோல் குளி
(நூறுக்கு) ஏ-த் தானே ஓதவெனில்:—
முற் கோலைமாறி நேரேபெத்த .... (அடி)யுடன் தாக்கி
முதலாய்க் கண்டு பின்னடியையும் குளியையுமப்படிப் பேசி-
முத்துகைக் கியந்ததனில் வந்த ஈவை-
முன் (சொன்ன) வந்த போதனில் (பொன்னதால்)
தாக்கி மொ(ழி)ளிகுவீரே [= (12)

என்பது— **விரித்துக்காட்டல்:—**
௰சு (16) அடிக்கோலால் குளி சய (40) ரு.தீர்வை பொன் ரு (5) ப—ஆ—
உ௰ச (24) அடிக்கோலால் குளி-ா (100) க்கு தீர்வை எத்தனை யென்றால்:—

௰சு (16) யு—ந் தன்னால் மாற குழி உாரு௰சு (256) இதை—சய (40)-ல் பெருக்க-
௰சூஉாசய (10240) என்று நிருத்தி - உ௰ச (24) யுந் தன்னால் மாற -
ருாஎ௰சு (576) இதை-ா-(100)ல் மாறக் குழி-ரு௰எசூசுா = (57600) -
முன்னிருத்தின - ௰சூஉாசய (10240) க்குக் குடுக்க:—

௰சூ. ரு : ரு௰சூ = $(10000 \times 5 = 50000)$
உா. ரு : சூ = $(200 \times 5 = 1000)$
சய. ரு : உா = $(40 \times 5 = 200)$

(1)ம்

௰சூ. இ : சுசூ = $(10000 \times \frac{1}{2} = 5000)$
உா. இ : ா = $(200 \times \frac{1}{2} = 100)$
சய. இ : உ௰ = $(40 \times \frac{1}{2} = 20)$

(2)ம்

௰சூ. ஓ : சூஉாரு௰ = $(10000 \times \frac{1}{8} = 1250)$
உா. ஓ : உ௰ரு = $(200 \times \frac{1}{8} = 25)$
சய. ஓ : ரு = $(40 \times \frac{1}{8} = 5)$

(3)ம்

(1ம் + 2ம் + 3ம்) (சேர்க்க) ஆ ரு௰எசூசுா (= 57600)ம்

சF. ஒருவன் பேரு(க்கு) = ரு இ௫ (5⅝) இதை முன்னிரை (முந்திபே) வந்த - ரு (5) ம் பணமாக்க - ருய (50) இதனுடனே - ரு இ௫ (5⅝) ஐ மாற - உ௱அ௰க வ (281¼) :— ஆதலால் - ௰சா (16) டிக்கோலால் குளி - சய (40)ரு ரு (5) ப— ஆ - உ௰ச (24) க் கோலால் குளி (௱ = 100)க்கு - உ௰அ௰கவ (உ௱அ௰கவ = 281¼) ப— என்பது : இதனால் :—

$$\left(\frac{24 \times 24 \times 100 \times 5 \times 10}{16 \times 16 \times 40}\right) = \left(\frac{7200 \times 5}{128}\right) = \left(\frac{3600}{128} = 281\tfrac{1}{4}\right)$$

என்று விடை ஏற்படுகின்றது.

விருத்தம் :—

திங்களொன்றுக் (கஞ்ஞாளிக்காலினாலே) கைக்நாழிக் காலினாலே—
நெல் திருந்தவு முக்கலந் தனக்குச் சேவிப்போனும்—

சங்கையுடன் மதியாறு திவசம் பற்று (பத்து) தானே சேவிக்கு (மெண்
ணுளி) மெண்ணுழிக் காலால் இங்கு வென்றான்
பெருவதுறை செய்ய வென்றால்—

இயன்றுமுதலுடனே கடைசியெட்டை மாறி-
அங்கதவுமுதல் நின்ற தனைத் தாக்கி-அம்முதலுக்
கீய்ந்தே கலமா மறைகுவீரே (13) என்பது.—

௩௰ (30) ளுள் சேவித்தானுக்கு (5) ரு உ காலால் [(ரு = 5) உறிமரக்காலால்] ௩ள (3 கலம்) ஆ மீ— சா (6) ளுள் -- ௰ (10) சேவித்தானுக்கு - அ உ காலால் (8 உறிமரக்காலால்) யெத்தனை என்றால் :—

[முதலாகிய - (௩௰) ம் - கடைசியாகிய அ (8ம்மாற)] முதலாகிய முப்பதும். கடைசியாகிய எட்டும்மாற - ௩௰. அ. உ௱ச௰ = (30 × 8 = 240) என்று வைத்து இதனை முதலாக நிருத்தி ௩ள மும்-மரக்கால்படுத்த - ச௰ரு (கலம் 3 × 15 = 45) இதனை ரு உ (5.உறி ஆகிய) ஐந்தில் மாற - உ௱உ௰ரு = (225) = (5 × 45 = 225) இதுவுடனே மீ சா (6) ளுள் படுத்த - ௱அ௰ (180) இதுவுடனே ளுள் - ௰ = (10)ம் பத்தும் கூட்ட ஆ ௱கூ௰ = (190) ளுளில்மாற—

உ௱. ௱ . உ௰௲ = (200 × 100 = 20000)
உ௱. கூ௰ : ௰அ௲ = (200 × 90 = 18000)
௱. உ௰ : உ௲ = (100 × 20 = 2000)
கூ௰ரு. உ௰ : ௲அ௱ = (90 × 20 = 1800)
௱. ரு : ரு௱ = (100 × 5 = 500)
கூ௰. ரு : ச௱ரு௰ = (90 × 5 = 450)

ஆ - சம்உகூளாறும் = 42750 = (20000 + 18000 + 2000+1800+500 +450) இதை முன்னிருத்தின - உாசம் (240) பேருக்குக் குடுக்க ஈய்வு= ாஎம்அஅ $\left(\frac{42750}{240} = 178\frac{1}{8}\right)$ இதை குறுணி வாயில்களிக்க - மகள ஹுங்கூது ஆதலால்:— கூம் நாள் (30 நாள்) சேவித்தானுக்கு ரு உ காலால்—கூள (³கலம்) ஆ - மீ சு (6) நாள் - ம (10) சேவித்தானுக்கு - அ உ காலால் - மக. ள. ஹுங்கூது என்பது

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும் :—

விருத்தம் :—

மாதமொன்றுக்கு ஞளிக்காலிஞலே வாகாக நாக்கலமே பெத்தவேணும்— ......ாத வெண்ணுலிக்காலால் இருபத்தாறு புரிந்தகலம் பத்தினவன் சேவிக்குந் திங்கள் யேதனில் (யாதென்னில்) :—

மூன்மரக்காலும் நெல்லும் மாறி இதனுக்கே உத்தசெல்லாந் தாக்கி (உத்த செல்லாந்தாக்கி) ஈய, சாதகமாய் வரும் பேரைநாளதாகத் தவறுமனுறை யென்றார் தமிள்(ழ்) வல்லாரே (14) என்பது :—

விரித்துக்காட்டல்:—

கூம் (30) ஞள் சேவித்தானுக்கு சு உ (6உரி)க் காலால் - சள (கலம் 4) ஆ அ உ (8உ)க் காலால் - உம்சு-ள- (26 கலம்) பத்திக்கொண்டவன் சேவிக்கும் மாதமெத்தனையென்றால் ,— சு உ (6உ) யாகிய - சு ரு (6ரு) சள (4ள) மாகிய - சும் - மரக்காலையாற சும். சு : கூாசும்= $(60\times6=360)$ என்று நிருத்தி - அஉ (8உ) யாகிய - அம (8ம) உம்சு. ள. (26ள) மாகிய- கூாகும் (390) மாற [இங்கே விவரணம் யாதென்றால் : (6உ) யாகிய - 6 மரக்காலையும். (4ள) மாகிய $(4\times15=60)=60$ மரக்காலையும்மாற $=6\times60=360$. என்றும், (8உ) யாகிய 8 மரக்காலையும். (26ள) மாகிய $(26\times15=390)=390$ மரக்காலையும் மாற $=8\times390=3120]$ = கூகூாஉம் 3120). மூவாயிரத்து நூத்திருபத்து இதவுடனே முதலாகிய கூம் (30) பாற கும்கூகூசுா $=(3120\times30=93600)$ இதனை முன்னிருத்தின மூன்னூத்தறுபத்துக்குக் குடுக்க (வேண்டிய விவரணம் கிழே)

உாரு கூா : சும்கூ $= (200\times300=60000)$
உாரு. சும் : மஉகூ $= (200\times60=12000)$
கூாரு. சும் , மஅகூ $= (300\times60=18000)$
சும்ரு. சும் : கூகூசுா $= (60\times60=3600)$

ஆ கும்கூகூசுா (93600)ம் [உாசும் = 260க்குச்] சரி (ஆதலால்) ஈய்வு-உாசும் (260) இதனை (நானானபடியால்) மாதப்படுத்த மீ அ (8) ஞள்-உம் (20)

ஆதலால் :— கூம் (30) நாள் சேவித்தானுக்கு (சுஉ) காலால் (சம்) ஆ (அஉ) காலால் - (உம்சு. ள) பத்தினவன் சேவிக்கும் மீ யெத்தனை யென்றால் ;— மீ அ (8) நாள் உம் (20) என்பது.—

தாளிசை :—

கோல்தான் பதினாறு(றி)லுற்றளவு கொண்டுவந்த ஒருமாநிலங் கூறதாக, அறு ளுளியே குறுணி கொள்ளவே வருங்காலதால், ஏல வெண்கல வரிசை யாகவும், மிரை யிருத்தி முன் வணா (வேண) எத்தமான இருபத்து நாலடி இந்தக்கோலிலிருமாநில . . . ாலமே உளுதவனு மென்(ண்)படிக் காலி லெத்தனைக் கணக்கெனக்கணுக் கோலினைத் தன்னை ாறின முன்கண்ட மாவினில் - தாக்கியே - ஞால மென்ன வ(கு) நி கடகியெட்டதனில் நாட்டி. நீர்முதலாகவே நவின்ற மற்றதுமாறி ஈய்ந்து கலம் நன்மை யாகவுறை நண்ணியே (15). யென்பது.

இதை விரித்துக் காட்டல் :— (குறிப்பு :— கால் = மரககால் என்பது) :—
ௐசு (16)டிக்கோலால் - (மா-நிலத்துக்கு) :—

ப (மாவு) ரு - சு உ (6உ)க்காலால் (ஆறு உறி மரக்காலால்) அ-எ. (8கல) ஆ - உௐச (24)டிக்கோலால் உ ப— (2 மாவு) ரு அ (8) உறிக்காலால் நெல் லெத்தனை யென்றால் :—

முதலாகிய – ௐசு (16)பு-ந் (தன்னில்) மாற குழி உௐருௐசு (256) நிலம் ஒருமாவாகிய ஒன்றுடனேயும்மாற-உௐருௐசு (256). இதை கடசி (அஉ = 8 உரி) யாகிய (அ)ல் மாற- உஆசௐஅ (2048) யென்று முதலாக நிருத்தி —. சு (6) உ. யாகிய - சு (?) [? = (ரு)]க்கும் – அ எ (8 கல) மாகிய ாஉௐ (120) ரும் மாற எாஉௐ (720=120×6) - உௐச (24) யுந் தன்னால் பாற - ருாஎௐசு = (576) இதுவுடனே முன்னிருத்தின – எாஉௐ (720) ஐ மாற :—

எா ரு. ருா : நூாஆருௐஆ = (700 × 500 = 350000)
எா ரு. எௐ : சௐகூஆ = (700 × 70 = 49000)
எா ரு. சு : சஆஉா = (700 × 6 = 4200)

ருா ரு. உௐ : ௐஆ = (500 × 20 = 10000)
எௐ ரு. உௐ : ஆசா = (70 × 20 = 1400)
உௐ ரு சு : ாஉௐ = (20 × 6 = 120)

ஆ. சாஆௐசஆஎாஉௐ = (414720) இதனை • உ (2) ப— - மா-வாகிய உ=(2)ல் மாற – அாஆஉௐகூசாசௐ (8,29,440) இதை முதலாக நிருத்தி - உஆசௐஅ (2048) ருக் குடுக்க :

உஆ : சா : அாஆ = (2000 × 400 = 800000)
சா ரு. சௐ : ௐசுஆ = (400 × 40 = 16000)
சா ரு. அ : நூஆஉா = (400 × 8 = 3200)
உஆ-ரு: ௐஆ = (2000 × 5 = 10000)
சௐ-ரு: உா = (40 × 5 = 200)

௮-௫: ௪௰ = (8 × 5 = 40) ஆ. இதன் மொத்தம் யாதென்றால் :—

(௰௫ × ௨௰௭) $\left(\frac{829440}{2048}\right)$ = 405 = (௪௱௫) ஆ. இதனைக் குறுணிவாயில் களிக்க — { (27) = $\left(\frac{405}{15}\right)$ } ள. ஆதலால் :—

௰௬ (16)டிக் கோலால்-ப— ரு - சு உ(உறிக்) காலால் அள ஆ - உ௰௪ - டிக் கோலால் உ ப— (உ ப = இருமா) ரு-அஉ (உறிக்) காலால் — உ௰௭-ள-(27-கலம்) என்பது உ.

இது வன்றியுஞ் நிலத்தில் சில்வானமாக வந்தால்-நிலம் ஒருமாவுக்கு (ப-ரு) ௰௬ (16) முந்திரி யென்று பெருக்கிச் சொல்லுவது :—

விரித்துக் காட்டல்:—

௰௨ (12)அடிக் கோலால்-ப (1-மா = ப—) ரு-அ (8)உக் காலால் ௩ள (3 = மூன்று கலம்) ஆ — உ௰௪ (24)அடிக் கோலால் — ஓ வது ள ரு ($\frac{1}{80}$ + $\frac{1}{320}$ = $\frac{5}{320}$ = $\frac{1}{64}$ கலத்துக்கு) சு (6)உக் காலால் ஷை யெத்தனை யென்றால் .—

முதலாகிய - ௰௨ (12) யுக்தன்னில் மாற ௱௪௰௪ (144). இதுவுடனே ஒருமா (1 = ப) வையு முந்திரி = ௰௬ (16) ஆ வச்சு (வைத்து) மாறி — உ௲௩௱௪ (=2304) இதை கூடகியாகிய - சு (6) டியும் சு (6) ஆ வச்சு (வைத்து) மாற -௰௩௲அ௱உ௰௪ (= 13824) யென்று முதலாக நிறுத்தி - அ (8) உ யாகிய - அ (8) (ரு) = (மட்டுக்கும்) முக்கலமாகிய-சயரு (3 × 15 = 45) ரும்மாற ௩௱சுய (360) இதனை-உ௰௪ (24) யுக்தன்னில் மாற ருஎளயசு (24 × 24 = 576) உடனேமாற

௫௱ ரு. ௩௱ : ௱௫௰௲ = (500 × 300 = 150000)
௫௱ ரு. சுய : ௩௰௲ = (500 × 60 = 30000)
௩௱ ரு. எய : உ௰௧௲ = (300 × 70 = 21000)
எய ரு. சுய : ச௲உ௱ = (70 × 60 = 4200)
௩௱. ரு சு : ௲அ௱ = (300 × 6 = 1800)
சுய ரு. சு : ௩௱சுய = (60 × 6 = 360)

ஆ =[உ௱எ௲௩௱சுய = (207360)] இதுவுடனே - நிலமாகிய (ஓ வது) ள யும் (முந்திரிப்படுத்த :— ரு) = [(நிலமாகிய — (ஓ வது) ள = $\frac{1}{80}$ + $\frac{1}{320}$ = $\frac{5}{320}$ = $\frac{1}{64}$ ள யும் முந்திரிப்படுத்திய = $\frac{1}{64}$ × 320 = 5)] ரு இ஌ ($5\frac{1}{2}$) மாற:—

உ௱௲ரு. ரு : ௰௱௲ = (200000 × 5 = 1000000)
எ௲ரு. ரு : ௩௰௫௲ = (7000 × 5 = 35000)
௩௱ரு. ரு : ௲௫௱ = (300 × 5 = 1500)
சுய. ரு : ௩௱ = (60 × 5 = 300)
உ௱௲. இ : ௱௲ = (200000 × $\frac{1}{2}$ = 100000)
எ௲. இ : ௩௲௫௱ = (7000 × $\frac{1}{2}$ = 3500)

௩ா. இ : ாருய $= (300 \times \frac{1}{2} = 150)$

சாய. இ : ௩ய $= (60 \times \frac{1}{2} = 30)$

உாக-ஞு: உயருக $= (200000 \times \frac{1}{8} = 25000)$

எக-ஞு: அாஎயரு $= (7000 \times \frac{1}{8} = 875)$

௩ா-ஞு: ௩யஎ இ $= (300 \times \frac{1}{8} = 37\frac{1}{2})$

சாய-ஞு: எஇ $= (60 \times \frac{1}{8} = 7\frac{1}{2})$

ஆ௲ = [யக'சா(ய)க-சாகசா = (எயசாக-சாகசா)] $= (1166400)$].

இதை முன்னிருத்தின முதல் - யகக அாஉயச $= (13824)$ க்குக் குடுக்க அயச வஞு $= (84\frac{3}{8})$-இதை குருணிவாயில் கழிக்க — ருள - நச - மீ உ(உரி) ௲ $= (5$ கலம்-தூணி 4-மரக்கா உ;உறி $\frac{3}{4})$ என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லா மிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

விருத்தம் :—

பணமொன்றுக் கெண்ணுளிக் காலிநால்
நெல்பதக்கு மறுணுளி விலைபகருங்காலை
குண முடையீரொன்பது பொன் எழுக்கேநெல்
கூறு வீரறுணுளிக் காலாலென்னில் .—
பண முதலும் அறுணுளிதனையு மாறிப்
பண்பாகப் பணமொன்றுந் துகையுந்தாக்கி
மணமலர்சேர் குள(ழ)ல் மடனீர் முன்துகைக்கீய்ந்து
வருமீவைத்தான் குருணிவாயில் நாட்டே (16) என்பது :—

இதை விறித்துக்காட்டல் :—

பணம் க (1)க்கு-அ (8) உரிக் காலால் ஷெ ஹு-சாஉ = (பதக்கே ஆறு உழி) ஆ௲-கூ பொன் எ (= 9 பொன் 7)ரு-சா (6) உரிக்காலால் நெல் யெத்தனை யென்றால்.—

முதலாகிய பணமொன்றும் - கடைசியாகிய; சா (6) உரியாகிய - சா (6)ம் மாற-சா: க: சா $(= 6 \times 1 = 6)$ என்று முதலாய் நிருத்தி-அஉ (8·உறி) யாகிய-அ (8)ம் பதக்கை அறுணுளியாகிய-உ ௲ $(2\frac{3}{4})$ம் மாற :—

உயஉ $(2\frac{3}{4} \times 8 = 22)$ ஷெ (ணுளி) - கூ பொன் எ (9 பொன் 7)ம் பணப்படுத்த $(97 = 9 \times 10 + 7)$ = கூயஎ – இதுவுடனே உயஉ (22) மாற = உகாா௩யச $(= 2134)$ இதனை முன்னிருத்தின ......பேருக்குக்குடுக்க-ஈய்வு-௩ாா௩யரு இநிஉஷத $(335 + \frac{1}{2} + \frac{3}{20} + \frac{1}{80} + \frac{1}{320} = 335\frac{213}{320})$

[இங்கே விசேஷம்:—ஆ 2134ஐ வகுக்க வேண்டிய எண்-6. (ஆறேதான்); சுவடியில் எக்காரணத்தாலோ — (௩௱௫௰௫ இ ரி௶) என்றிருக்க வேண்டிய துகையானது (௩௱௩௰௫ இ ரி௶) என்றே தானிருக்கிறது. இதை புத்தி மான்கள் அவசியம் ஆலோசனை செய்ய வேண்டியதாகும். மேலும் இதன் வாஸ்தவமான எண்ணிக்கையின் = $[(\frac{2134}{6} = 355\frac{2}{3}) = (355 + \frac{2}{3} \times 320)$ $= (355 + \frac{640}{3}) = (355 + 213\frac{1}{3}$ ௶) = (என்றால் மூன்றிலோர் பங்குடன் கூடிய இருநூற்றுப் பதின்மூன்று முந்திரியும் மூன்னூற்றைம்பத்தைந்து மென்று சொல்வது.)]

இதைக் குறுணிவாயில் களிக்க:— உ௰௩ கலம் தூணி ச (23 கலம் தூணி 4) ஆதலால்:— பணம் க (1) ரு அ உ (8உ) க்காலால் (ஹ சா உ) ஆ — கூ பட எ ரு — சா உறிக் காலால்: உ௰௩ ள ச தூணி உறி - க - = (கலம் 23 தூணி 4 உறி-1-) என்பது.

விருத்தம்:—

மூவியினு மறுளிக்காவினுலே
பொருந்திய முக்குறுணி ஒருபணமதாக—
மேவிய நோ ரென்னு(ண்ணு) விக்காவினாலே
விளங்கியநெல் யெண்கலமே விலையே(யா)தென்னில்
கூவியமுன்படி யுடனேமுக்குருணி தாக்கிக்
கொண்டதனை முதலாகக் குறித்துக்கொண்டே
ஓவியமாய் வருமூன்று துகையும்மாறி
ஒருதுகைக்கிய்ந்தே பணத்தை உறைத்திடுறே (17) என்பது.—

பணம் – க (1) ரு சா (6) உறிக்காலால் (முக்குறுணி) ஆ அ (8)உ க்காலால் அ ள (8 கலத்துக்கு)ப் பொன்னெத்தனையென்றால்:—

சா உ யாகிய - சா (6கும்), (3க்குறுணி) யாகிய ௩ (3க்கும்) பெருக்க சா. ௩ : ௰அ (= $6 \times 3 = 18$) என்று நிறுத்தி;— அ (8) உ யாகிய (8ம்) அ–ம் எண்கலமாகிய (= $8 \times 15 = 120$) - ௱௨௰ -க்கும் மாற:—

௯௱௬௰ = (960) இதைப்பணமாகிய - க (1)ல் மாற = ($960 \times 1 = 960$) = ௯௱௬௰. இதை முன்னிருத்தின - ௰அ (18) ரு க்குடுக்க ஈய்வு-(பணம்)- = ௫௰௩வஸிபி கீ இ ரி௶ இம்மி ௩ இ = $[(53\frac{1}{3}) = (\frac{960}{18})$ = (பொன்-௫; பணம் - ௩வஸிபிகீ இ ரி௶ — இம்மி — ௩இ = பொன் 5-பணம்-$3\frac{1}{3}$)]:— என்பது.

கொச்சகம்:—

ஓரெட்டு மாத்தில் ஒருவிராகன்பணமே—
நேரிட்ட நாலெளாம்(நாளெலாம்) நீயோறுமாத்துக்கு
பேரிட்ட முன்னிரண்டும் பெருக்கமுதல்மூன்றும்
நீரூட்டத்தாக்கி நிறுத்தினத்துகைக் கீய்வீரே (18) என்பது:—

இதை விரித்துக் காட்டல் :—

அ (8) மீ (மாத்து) விராகன் க ரு (1க்கு) [உ௰அ = (28) பணமாக]

சு மீ (6மாத்து) விராகன் ஒன்றுக்கு ப— (பணம்) யெத்தனை யென்றால்:—

அ-ம்-கம்—பெருக்க அ. க : அ = ($8 \times 1 = 8$). என்று நிருத்தி - உ௰அ,ம் சு ல் பெருக்க :— (௱சு௱அ) ($= 28 \times 6 = 168$) இதைக் கடசியாகிய ஒன்னில் மாற = ௱சு௰அ (168) இதை முன்னிருத்தின - அ ரு (8க்கு) க்கூடுக்க ஈய்வு ௨௰க ($\frac{168}{8} = 21$).

ஆதலால் :— அ (8) மீ விருகன் க (1)க்குப் பணம் உ௰அ (28) ஆ-சு (6) மீ விருகன் க (1) ரு ௨ - உ௰க (21) பணம் என்பது :—

கொச்சகம் :—

மாத்தெட்டில் நன்றாய்வரும் விருகன்னேளுனுங்கே
(நான்கே)த்தவிலே ஒன்பதுபொன்
னெட்டுக்கே ளுமாத்தில் பாத்துவிலே
கூபபணு (க்குப்பணம்) பின்மாத்தும்
பெருக்கியேத் துகைதாக்கி
முதலுக்கிய்ந்து மிகசொல்வீறே = (19)—
யென்பது :—

அ (8) மீ ல் விருகன்-க. ரு [உ௰அ (28) பணமாக] உ பொ-அப (2-பொன் 8 பணம்)] பணமாக கூ௰அ (98) ரு எ (7) மீ ல் விருகனெத்தினை யென்றால் .—

பணமாகிய — உ௰அ (28)ரு - இருபத்தெட்டுக்கும் - பின்மாத்தாகிய- எ-ரு (7க்கும்) பெருக்க - ௱கூ௰சு ($28 \times 7 = 196$) என்று (வைத்து.) நிருத்தி - முன்மாத்தாகிய - அ ரு (8க்கும்) பணமாகிய - கூ௰அ (98) ரும் மாற - எ௱அ௰ச = ($98 \times 8 = 784$) இதனுடனே விருகனாகிய — க (1) ல் மாற — எ௱அ௰ச (784) - முன்னிறுத்தின - ௱கூ௰சு = (196) ரு க்குடுக்க ஈய்வு — ச ($= \frac{784}{196} = 4$) ஆதலால் :— அ மீ விருகன்—க— ரு உ௰அ பணம் ஆ கூ௰அ ரு எ மீ ல் விருகன் ச ($= 4$) என்பது.

கட்டளைக்கலிப்பா :—.

சொன்னமாத்திற்கு நான்கைந்திடையுடனே—
தொன்று முண்டெட்டறை — மூன்றுமே—
இன்னமென்னறை நாலாறுமாத்தி
ரண்டேகமாக வுறுக்கியமாத்து
என்னவோவென்னிலே :—
இடைமாத்தையும் இதக்கமாறி
யிடைக்கிய்ந்து........யாகி தெனப்பகர —
இந்த வாராக வருங்கணக்குயாவுமே (20)
என்பது :—

இதை விரித்துக்காட்டல் :—

அ (8) மீல் விருகன் - ரு (5)—
எ (7) மீல் விரு ‡ன் - உ (2)
அ இ ($8\frac{1}{2}$) மீல் விருகன் - ங (3)—
எ இ ($7\frac{1}{2}$) ஷை — ஷை ச (4)
சா (6) ஷை — ஷை - உ (2)

ஆ அஞ்சுவகையு மேகமாக (ஒன்றாய்ச் சேர்த்து) உறுக்க. எத்தனை மாத்துக்காணு மென்னில் :—

அந்தந்த மாத்தையும் விருகனையும் ஒன்றுக்கொன்றுமாற :—

அ. ரு : சய = ($8 \times 5 = 40$)
எ. உ : யச = ($7 \times 2 = 14$)
அஇ ரு. ஙரு : உயருஇ = ($8\frac{1}{2} \times 3 = 25\frac{1}{2}$)
எஇ ரு- சரு : ஙய = ($7\frac{1}{2} \times 4 = 30$)
சா ரு. உரு : யஉ = ($6 \times 2 = 12$)

ஆ = ாஉயகஇ = ($121\frac{1}{2}$)—இதை விருகனுகிய (—ரு உ-ங-ச-உ) = யசா ($5+2+3+4+2$) = (16) ரு க்குடுக்க ஈய்வு - எ இ பகூ = [$(7+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32})$ $= (7+\frac{5}{10}+\frac{9}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{7}{10000}+\frac{5}{100000}) = (7+\frac{59375}{100000}) = (7.59375)$ $= (7+\frac{10}{32}+\frac{9}{32}) = (7\frac{19}{32})$] மாத்தென்பது.

இன்னுகலித்துறை :—

பேவானஒன்பதறை மாத்துநாலு விருகனிலே—
வெ(யே)வானவெள்ளி இதனே(ு)இருக்க
வேணமாத்திலநுகரு நூலா கம ந்தனில்
முன்மாத்துடனு வு(னு)னுனிடை பேருக்குப்
பாலாமாகிதப்புக்கு மாத்துக்கியந்து—
பகர்வா யென்னே :— (21)

இதை விரித்துக்காட்டல் .—

கூஇ ($9\frac{1}{2}$) மீல் விருகன் - ச (4) ல் சிறிது வெள்ளி போட்டுருக்க - அ (8) மீத்து கண்டது — இதிற்புகுந்த வெள்ளி யெத்தனையென்னில் :—

முன் மாத்தாகிய - கூஇ ($9\frac{1}{2}$)யும் - விருகனுகிய - ச - (4)-ம் பெருக்க -ஙயஅ (38). இதை பிற்கண்ட மாத்து - அ (8) ருக்குடுக்க ஈய்வு - சஜ ($=\frac{38}{8}=4\frac{3}{4}$) - முன் விருகன் - ச (4) போக நீரு அதியம் (அதிசம்) வெள்ளி விருகன் — ஜ($\frac{3}{4}$) ஆதலால் :— கூஇ மீ விருகன் - ச - ல் சிறிது வெள்ளி போட்டுறுக்க - அ - மீக் கண்டால்:— உள்புகுந்த வெள்ளி விருகன் = (ஜ $=\frac{3}{4}$) என்பது.—

ஆசிருவிருத்தம் :—

மாதவன் சொன்ன முருவன்னமும் வண்மைந்தன் மலாமானிடையும் ரகமரு வருக்கயமும்-மறை நூலா ஸத (ஸ்த)ருவாக வருகின்ற அங்கமணில் பொதநவவீர் கருங்குணமைந்து முதமுமபுகாமி குங்காண மோன்றுப் பூரணமதாகவே நிரை கின்ற அருளினை புகலுதற் கெளிதாகுமோ—காதலுடனவாவர (னவரவர்) பெருமை நின்ற...பு முளங்கண்டு கொண்டினி தாக்கியே— கணமாக வைத்த பின்னிடையிலே வருகின்ற காவதனை யெஞ்(ன்) சொல்லுவேன்—ஆதர வாகவே புகர் மொளியை மேல் வைத்து அரிதாக வுதவிசெய்து வாமெனவுமே காதரமிதனையே தெரிந்தரைகின்ற சவினிதவிதியே (22); என்பது :—

விரித்துக்காட்டல் :—

ய. மீ விருகன். ரு = (10 மீ விருகன் 5)—

அ. மீ விருகன். ச = (8 மீ விருகன் 4)—

எ. மீ விருகன். ரு = (7 மீ விஉ 5)—

சு. மீ விஉ கூ = (6 மீ விஉ. 9)—

ங. மீ விஉ ரு = (3 மீ விஉ. 5)—

இதுவுடனே வெள்ளிவிராகன் (ஷை) ச (4) - ஏகமாய் உறுக்க எத்தனை மாத் துக்காணு மென்னில் :— பாத்துங்கிறையும் மினத்துக்கினம் மாறிப்பெறுக்கி ன; துகையை பொன்னிடையுடனே வெள்ளி இடையுங் கூட்டின; துகைக்குக் குடுக்கிறதாவது :

யரு ருரு மாற : ருய = (10 × 5 = 50)—

அரு சரு : ஙயஉ = (8 × 4 = 32)—

எரு ருரு : ஙயரு = (7 × 5 = 35)—

சுரு கூரு : ருயச = (6 × 9 = 54)—

ஙரு ருரு : யரு = (3 × 5 = 15)—

ஆ துகை = ளஅயசு = (186)—

இதை யிடையாகிய (ரு—ச—ரு—கூ—ரு) = (5 + 4 + 5 + 9 + 5) ஆ துகை உயஅ = (28) ம் வெள்ளி விருகனிடை - ச - (4) ம் கூட்ட ஆ ஙயஉ (28 + 4 = 32) ருக்குடுக்க ஈய்வு ருதைய = ($\frac{186}{32} = 5\frac{13}{16}$) = (ஐங்தேமுக்காலே வீசம்) — ஆதலால் :— ஷை (மாத்து ருதைய) = ($5\frac{13}{16}$) ல் என்பது:—

வேறு :—

அ (8) மாத்தில் ஙய (30) கள(ழ)ஞ்சு பொன் ஒடன் வைக்க - ய (10) மாத்தில் எத்தனை களஞ்சு பொன்காணுமென்றால் :—

முதல் - அ (8)ம் - ஙய (30)ம் மாற - உாசய = (8 × 30 = 240) = இதை - ய (10) மாத்தில் குடுக்க :—

ஈய்வு = உயச ($\frac{240}{10}$ = 24) கழஞ்சு. ஆகையால் - ய மாத்தில் உயச (24) களஞ்சு பொன்னென்பது.

இன்னுமொருவகை :—

எ. மாத்தில் - ௰௫ களஞ்சியும் = (7 மாத்தில் 15 களஞ்சியும்); சுஇ௲ மீல் உ௰-களஞ்சியும் = [($6\frac{5}{8}$ ல்) மாத்தில் (20) களஞ்சியம்;] - ௫௲ ($5\frac{3}{4}$) ல் மாத்தில் - ௰ (10) - களஞ்சியும் - ஒடன்வைக்க - அ (8)மீல் எத்தனை களஞ்சி பொன் காணுமென்றால் :— மாத்து மிடையுமொன்றுக் கொன்றுமாற

எரு. ௰௫ : ௱௫ = ($7 \times 15 = 105$)—

சுஇ௲ரு. உ௰ரு : ௱௩௰உஇ = ($6\frac{5}{8} \times 20 = 132\frac{1}{2}$)—

௫௲ரு. ௰ரு : ௫௰எஇ = ($5\frac{3}{4} \times 10 = 57\frac{1}{2}$)—

ஆ துகை - உ௱௯௰௫ = (295). இதனை பிற்கண்ட - அரு (8க்கு)க் குடுக்- கய்வு - ௩௰சு௲ = ($\frac{295}{8} = 36\frac{7}{8}$)— ஆதலால் :— ஒடன் வைத்த விருகன் ச௰௫ - கண்ட விருகன் - ௩௰சு௲ ($36\frac{7}{8}$) என்பது.

ஆசிரி விருத்தம் :—

வன்னமிகு மொன்பதேகால் மாத்திவிடையன்றி
வருகின்ற பொன்னுடனே வங்கமோரூறு—
காசிடைக் கட்டியுறுக்கிடில்-வழுவாமல் வருமாத்துமே
என்னவெனில் (விரா) கண்மூக்காறுமே உந்திடுறுற்ற
கணக (?) நிரையை இயப்பவே முன்மாத்திலுக்கே
குறைஇதனிலறை ஒன்றுமென அன்னதனைமுதலாக—
வைத்ததன் - அறைகின்ற மாத்திலுடனே—அடவான
வெள்ளியினிறையதனைமாறி ஒன்றறைக்கணக்கியலே
தான்முன்ன வருமிவகை பொன்னிறையாமென்று
மொளியுறு (லா) - மென உறைத்தார் மூதருககையாவு -
(மி) ப்பொன் கணக்கின்படி மூ தண்டமாகஉறையே = (23) =
என்பது :—

கூவ ($9\frac{1}{4}$) ஆகிய மாத்தில் சிறிது பொன்னில் - சு (6) விருகனிடை வெள்ளி கூட்டியுறுக்க - எ௲ ($7\frac{3}{4}$) மாத்துக் கண்டால் பொன்னிறை யெவ்வள வென்னில் :—

முன்மாத்து - கூவ ($9\frac{1}{4}$)ல் பிற்கண்டமாத்து எ௲ ($7\frac{3}{4}$)உம் போக நீக்குறை - கஇ ($1\frac{1}{2}$)யும் முதலாக நிருத்தி - பின்கண்ட எ௲ ($7\frac{3}{4}$)யும் வெள்ளி நிறை- சு (6)ம் மாற - சசுஇ ($46\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4} \times 6 = 7.75 \times 6 = 46.5$) இதனை முதலாக நிருத்தின - கஇ ($1\frac{1}{2}$)க்குக் குடுக்கஈய்வு - ௩௰க = $\left(\frac{46.5}{1\cdot5} = 31\right)$ ஆதலால் பொன் (விருகன்)—௩௰க (31) என்பது—

௬ மீ விருகன் ௬ = (6 மாத்து விருகன் 6)
௭ ஷை ஷை ௭ = (7 ஷை ஷை 7)
௮ ஷை ஷை ௮ = (8 ஷை ஷை 8)
௯ ஷை ஷை ௯ = (9 ஷை ஷை 9)
௰ ஷை ஷை ௰ = (10 ஷை ஷை 10)

சிறிது வெள்ளியுங் கூட்டியுருக்க - ௭½ ($7\frac{1}{2}$) மாத்துக்கண்டால் - கூட்டின வெள்ளி யெத்தனை யென்னில் :—

இனத்துக்கு (ம்) மாத்துக்கு (ம்) நிறையும் மாற :—

௬ ரூ. ௬ ௩௰௬ = ($6 \times 6 = 36$)
௭ ரூ. ௭: ௪௰௯ = ($7 \times 7 = 49$)
௮ ரூ. ௮: ௬௰௪ = ($8 \times 8 = 64$)
௯ ரூ. ௯ : ௮௰௧ = ($9 \times 9 = 81$)
௰ ரூ. ௰: ௱ = ($10 \times 10 = 100$)

ஆக துகை - ௩௱௩௰ = (330) இதைக்கண்டு மாத்து - ௭½ ($7\frac{1}{2}$) ரூ குடுக்க வப்பு - ௪௰௪ = ($44 = 330 \div 7\frac{1}{2} = 330 \div \frac{15}{2} = 330 \times \frac{2}{15} = \frac{660}{15}$ $\therefore$ ஷை = 44) முன் கூட்டியுருக்கின அஞ்சுவகைப் பொன்னும் (உடைய) விருகன் - ௪௰ = (40-ம்) போக நீரு விராகன் - ௪ = [(ஷை 44—6—7—8—9—10) = (44–40)] = 4 ஆதலால் - கூடின வெள்ளி விருகன் ௪ (4) என்பது.

௬ மாத்தில் விருகன் ௰ = (6 மாத்தில் விருகன். 10)
௭ ஷை ஷை ௰ = (7 ஷை மீ 10)
௮ ஷை ஷை ௰ = (8 ஷை ஷை 10)
௯ ஷை ஷை ௰ = (9 ஷை ஷை 10)
௰ ஷை ஷை ௰ = (10 ஷை ஷை 10)

இதனுடனே மாத்தறியாமல் - ௮ (8) விரு. (விருகன்) பொன் கூட்டியுருக்கிக் கண்ட மாத்து - ௮ (8) ஆதலால் மாத்தறியாப் பொன்னுக்கு மாத்து எத்தனை யென்றால் :—

மாத்தாகிய-௬-௭-௮-௯-௰ ஆக ௪௰ = ($6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$) இதைக் கண்டமாத்து — ௮ (8)ல் மாற :—

௩௱௨௰ ($40 \times 8 = 320$) நிறுத்தி—.

மாத்துக்கும் பொன்னுக்கும் மாற :—

௬ரூ ௰ரூ மாற: ௬௰ = ($6 \times 10 = 60$)
௭ ஷை ௰ஷை: ௭௰ = ($7 \times 10 = 70$)
௮ ஷை ௰ஷை: ௮௰ = ($8 \times 10 = 80$)
௯ ஷை ௰ஷை: ௯௰ = ($9 \times 10 = 90$)
௰ ஷை ௰ஷை: ௱ = ($10 \times 10 = 100$)

ஆ. தொகை = சா = (100 + 90 + 80 + 70 + 60 = 400)ல் மூன்னூறுத் தின-கூாஉம் (= 320)ம் போக மீக்கு = அம் = [(400 − 320) = (80)] இதை மாத்துயியாத-விருகன்-அ (8)க்குக் குடுக்க ஈய்வு-ம் = ($\frac{80}{8}$ = 10) ஆதலால்:—

ம் = (10) மீல் (மாத்தில்) என்பது.

(வேறு)

ஒரு ராசாவினிடத்திலே ஒரு சேவு(வ)கனுக்கு தினம் ஒரு விருகன் சம்பளம், அந்த சேவகன் எந்த வேளையில் வந்து சம்பளங் கேற்ப்பாளே அந்த வேளையில் சம்பளங் குடுக்கிறதனுலே:— ஓர் வருஷத்துக்குச் சம்பளம் பத்து மோதிர மாகச் செய்யப்பாட்டு:—

கட்டளைக் கலிப்பா:—

ஆண்டொருமுன் னூற்றறுபது வான
நாளின்படி கட்டளையில்–வேண்டுமோதிறம் பத்தில்
முன்னூறுடன் விருகன்றனிறுமுப்பது
வேந்தனு மருண்டு கொண்டனன்
ஒன்றுமிரண்டும்—புகலுமுன் (மூ) மூன்றது நாலுடன்
பத்துமாய்க்கண்ட ஞலஞ்சுமாகு மெட்டஞ்சும்கூர
(நாரு) நூத்தண்பனுமீபவே—அப்பால் ஒருமா
ஸைதசரி அஞ்சுமோதிரம்— "(24)"

விருத்தம்:—

நாப்பதுநாள் (நாங்ப்பத்துநாள்) சேவித்தோன் தனக்குத்தானும்—
மூகியாமலாறைந்து முறைமையாக—
செப்பமுடனினைந்த (நினைத்த)விதம் பேசுதிறமாக–
மோதிரத்தை அஞ்சேசேசீர்—
ஒப்பமுடனென்று ரெண்டுநாலுமெட்டும்—
உகந்தொரு பதினைஞ்சு முகந்தேசெய்யில்–
எப்பவந்து சேவித்தோன் கேட்டானுல்
ஈய்பலாம் மோதிரத்தை யென்றுந்தானே = (25)

கட்டளைக்கலிப்பா:—

மன்னனுக்கு மன(னை)வியர் மூவர்கள்மைந்தனன
வாதான வெள்ளறிக்கனி—அன்னவன்தான்
(அன்னவன்றன்) மூன்று கூறுக்கியே–
(அளித்தானதனை) அளிதள்ளதனையாக
யொன்றதிகமே இன்னவாரந்த
மூவருமே செயிலிருந்த மீதியிவைவன்—
சரியிடில் முன்னலந்தகனியறு ஞன்குடன்–
மொளிவமொன்றெனமூதறிவோர்களே = (26)–

கொச்சகம் :—

மத்தகசம் பத்தினுக்கே மருவிய பொன்ன (ன) சேர்க்கும்
பரிபண(ம்) பத்தஞ்சுதனக்கே—
நாலுபத்துட னென்றேகால்—
பணந்தகமென முந்தினுக்கே—
உத்த இருநான்கும்—
முக்காலும் வேணபரபணமு நூறே = (27)

கொச்சகம் :—

தித்திக்கும்பூசனிக்காய் செப்பியபத் தொன்பதுக்கே—
உத்த தொண்ணூத்தஞ்சு
வருவது மொன்றினுக் கொன்ருகுவமே
கைத்திருக்கும் பாகக்காயி—
யென்பதோர் நாலு(ம்) பெத்தஉருவும்
நூறு—பெருங்காசு நூரதாமே = (28)

கொச்சகம் :—

சுவாலி சேரினங்களின் பல
நீலோபுள்ளினமாய்த—தாவியிருக்கையி
தமுதாமொன்றுக்கில்லாதால் பே(வி)வி எளுந்து-
புட்டான மென்ற
வாக்குரெண்டாகி எருவியருமொன்று—
குணு புளக்கானமாகியதே = (29)

கொச்சகம் :—

தொண்ணூறு பலாத்துருவை இருநான்குடனேயென்னறிய
மெ(மே)தி இரண்டுமேதான் சிரக்க அண்ணலே
பாலொன்றறை மூன்றுநாலுக்கு (கெ)லாம்வண்ண
மெனவே கவிஞரும் வகுத்தபடி தானிதுவே = (30)

என்பது :—

பசுவுக்குப்பால்படி - க = (1); ஆட்டுக்குப்பால்படி - இ = ($\frac{1}{2}$); எருமைக்குப் பால்படி - ங = (3) ஆ உருவும் - நூரு - பால்படியும் நூரே =

கொச்சகம் :—

சனைகயுடன் ஞலாறு கொண்டகாசிபடிதான்
துலாவெ (வொ)ன்றினுக்கே—
தவருமலாறைந்து பணமதாக—
பரிசமுந்தான் வித்தவணிகனிடமே—

அங்கொருவனேகியோர் பதினாறுகாசிடையான
படியென துலாநீயருளென ஓ(?)முதலியே(?)
பொருள் கொ(ள்)ளும் வகையினை யடவாகவுரை செய்கவென-
பொங்கமுட(ள வ)யைந்து துகையென்றறிந்தே முன்பொருந்திய-
விரண்டு முதலாய்ப் போக ஒரு மூன்றையும்-
மாரியதன் முன்னம் புகல்வதற்க் கீய்வோன்-
இங்கிதமதாகவே வந்தொருவன்
பெற்றயிதின் விலையெனத்தொகுப்பீர்
என்னபடி வருகினுஞ் சொன்னபடியாகவே-
ஈய்வர் காணிக்கர் தானே = **(31)**

இது விரித்துக் காட்டல்:—

உ௰௪ (24) காசிபடியால் துலாம் - க (1)ரு - ந(பொன்) (ந௰ = 30 பணம்)
ஆ-௰௬ (16) (காசி) படியால்-துலாம்-அ (8)ரு யெத்தனை என்னில் :—

உ௰௪ம்-க-ம் மாற = உ௰௪ = ($24 \times 1 = 24$)-என்று நிறுத்தி-௰௬ம்-அ-ல் மாற-௱உ௰அ = ($16 \times 8 = 128$). இது உடனே ந௰ = (30)ம் பெருக்க=ந௲அ௱௪௰ = ($128 \times 30 = $ **3840**) இதை முன்னிருத்தின-
உ௰௪ (**24**)ருக் குடுக்க ஈய்வ-௱௬௰ = $\left(3840 \div 24 = \frac{3840}{24} = \mathbf{160}\right)$
இதை பொன் படுத்த — ௰௬ = ($\frac{160}{10}$ = **16**) (**பொன்**) என்பது—
பணவிடை அ ௯ ($8\frac{3}{4}$) கொண்டது விருகன்-க (**1**)
பணவிடை-௰உ இ ($12\frac{1}{2}$) கொண்டது களஞ்சு-க (1);
களஞ்சு ஒண்ணுக்கு மஞ்சாடி உ௰ — ய ($20 - \frac{1}{16}$)
பணவிடை—க (1)ரு மஞ்சாடி - க இ ஃ = (ஒன்னறை யோரண்டுமா)
= ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 1 + 0.5 + 0.1 = 1 + 0.6 = 1\frac{3}{5}$);
விராகன் ஒண்ணுக்கு-மஞ்சாடி-௰௪ = (14)—

விருத்தம் : = (32) =

சதிரத்தை நாத்தித்து தானவெண மெவாயால்-
திராயமொளித்த பொருளை துதி செ(சே)ரும்
முந்திரி வாயில் களிப்பெணவும்
காணுமே-இந்த விசளப் பிரப்பு = **(32)**.

என்பது :—

௯ ரு ௯ = முக்காலுக்கு முக்கால் எத்தனை யென்னில் = ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = ?$ எனில்) :—

௯ (= $\frac{3}{4}$ = முக்கால்) சதிரம் - ௬௰ = (60) இதை ௪ (4)ல் மாற :—

௬௱. ௪: உ௱௪௰ = ($60 \times 4 = 240$) இதை ௯ ($\frac{3}{4}$) வில் களிக்க = ௱அ௰ = ($240 \times \frac{3}{4} = 180$); இதை ௯ (முந்திரி = $\frac{1}{320}$) வாயில்களிக்க: —

இய = $[(180)\times(\frac{1}{320}) = (\frac{9}{10})]$ ஆதலால் ஹ ரு ஹ: இய = $(\frac{3}{4}\times\frac{3}{1}=\frac{9}{16})$ என்பது.

இ ரு இ = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = ?)$ எத்தனை யென்றால் :—

இ (ரு) சதிறம் - சய (40) = இதை ச (4)ல் மாற = சய. ச: ரசுய = $(40\times4=160)$ இதனை யரையி $(\frac{1}{2})$ல் களிக்க - அய = $(80=\frac{160}{2}= 160\times\frac{1}{2})$ இதனை முந்திரியி (ஷ) ல் களிக்க - வ - கால் = $(\frac{80}{320}=\frac{1}{4})$ ஆவதால் :—

இ ரு இ: வ = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4})$என்பது.

வருவ = $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = ?)$ எத்தனை யென்றால்:—

வ $(\frac{1}{4})$ ரு சதிறம் உய (20) இதனை - ச (4)ல் மாற - உய. ச: அய $=(20\times4=80)$ இதனை வ = $($காலி$=\frac{1}{4})$ல் களிக்க = உய (20) இதனை ஷ (முந்திரியி)ல் களிக்க - ய = $(\frac{20}{320} = \frac{1}{16})$ ஆதலால் வ ரு வ ய = $(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16})$ என்பது

இ ரு வ. $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = ?)$ எத்தனை யெனில் :— இ $(\frac{1}{2})$ரு சதிரம்-சய (40); இதை ச (4)ல் மாற — ரசுய = $(40 \times 4 = 160)$; இதை காலில் கழிக்க சய = $(160 \times \frac{1}{4} = 40)$—.

இதனை - ஷ $(\frac{1}{320})$யில் களிக்க ஷ = $(40 \times \frac{1}{320} = \frac{40}{320} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8})$ அரிக்கால். ஆதலால் :—

இ ரு வ : ஷ = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} =$ **அரிககால்**$)$என்பது.

வ ரு ய = $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = ?)$ எத்தனை யெனில் :— வ $(\frac{1}{4})$ சதிறம் = உய (20) இதனை ச (4)ல் மாற-அய = $(20 \times 4 = 80)$ இதனை-ய = $(\frac{1}{16})$ வாயில் களிக்க-ரு $(\frac{80}{16} = 5)$ இதனை ஷ (முந்திறி = $\frac{1}{320}$)வாயில் களிக்க-ருஷ= $(\frac{5}{320} = \frac{1}{64})$, ஆதலால்-வ ரு ய: ரு ஷ = $(5 \times \frac{1}{320} = \frac{5}{320} = \frac{1}{64})$ = (காணிமுந்திறி அல்லது கால் வீசம்) என்பது.

சபு ரு ஙி = $(\frac{1}{5} \times \frac{3}{20} = ?)$ யெத்தனை யென்னில் சபு ரு சதிரம்-யசு = $(\frac{1}{5}$ ரு சதிரம் $= \frac{80}{5} = 16)$; இதை ச (4)ல் மாற - சுயச = (64). இதனை ஙி $(\frac{3}{20})$ல் களிக்க - சு இ ஐ = $9+\frac{1}{2}+\frac{1}{10} \times 9{\cdot}6 = 9\frac{3}{5})$ இதை ஷ $(\frac{1}{320})$ல் கழிக்க — சு ஷ கீ இ ஐ = $9\frac{3}{5} \times \frac{1}{320} = \frac{86}{3200} = \frac{3}{100})$ ஆதலால் :— சபு ரு ஙி: சு ஷ கீ இ ஐ (அதாவது நாலுமா $(\frac{1}{5}$ வுக்கு மூன்றுமா $\frac{3}{20}) = (\frac{1}{5} \times \frac{3}{20})$ ஆவது அரைமா கீழ் அரையிருமா $= \frac{3}{100} =$ நூறில் மூன்றுபங்கு $= 0{\cdot}03$ என்பதாம்—.

ஸு ரு ஹு ($\frac{3}{16} \times \frac{1}{8} = ?$) யெத்தனை யெனில் ஸு சதிரம் $= (80 \times \frac{3}{16} = 15)$ யரு; இதனை ச-(4)ல் மாற-சூய ($15 \times 4 = 60$), இதை-ஹு ($\frac{1}{8}$)வில் கழிக்க-எ இ $= \left\{(60 \div 8) = (7\frac{1}{2})\right\}$ இதனை முந்திறி ($\frac{1}{320}$ = வு) வாயில் கழிக்கக — ஏ ஙி வுதகீ இ $= [(\frac{1}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{640}) = (7\frac{1}{2} \times \frac{1}{320} = (\frac{75}{3200}) = \frac{15}{640})]$ ஆதலால்:— ஸுரு ஹு ரு—ஏஙிவுதகீ இ $(= \frac{15}{640})$ என்பது—.

ஙிரு.ப $= (\frac{3}{20}$ ரு $\frac{3}{20} = \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = ?)$ யெத்தனை யென்னில் :—

ஙிரு சதிரம் $(80 \times \frac{3}{20} = 12)$ = யஉ - இதை ச (4)ல் மாற-சயஅ = $(12 \times 4 = 48)$ — இதை ப ($\frac{1}{20}$)ல் கழிக்க — உ வஙி $(\frac{48}{20} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5})$ இதை வு ($\frac{1}{320}$)யில் களிக்க — (ஙி கீ வ ஙி).

ஆதலால் :—

ஙிரு ப = ஙி கீ வ ஙி $= [(\frac{12}{5} \times \frac{1}{320} = \frac{12}{1600}) = (\frac{3}{400}) = (\frac{3}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{3}{400})] = [($ஙி கீ வ ஙி$) = (\frac{1}{160} + \frac{1}{1280} + \frac{3}{6400})$ $= \left(\frac{40 + 5 + 3}{6400}\right) = \left(\frac{48}{6400}\right) = \left(\frac{3}{400}\right)$] இதற்குப் பெயர் — (அறைக் காணியே கீழ்க் காலே மும்மா) = (ஙி கீ வ ஙி) என்பதாம் :—

விருத்தம் :—

ஒருவன்றன் பேரில் நாலுத்திருமெழுத்தை
    யென்னில், வரும் பொருளைத் தன்னில் மாறி—
மது மலல்லினத்தி நால(லே)த் தாக்கி—
    பெருமையா மெழுத்துக் கிய விரைந்திடும்
ஒருவன் பேரை - அருமையாம்
    விசாலமென்னும் மறிந்திடு மியல்பு தானே = (33)

விரித்துக் காட்டல் :—

ஹு ரு ஹு ($\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$ = ? = அரிக்காலுக்கரிக்கால்) எத்தனையென்றால் :—

ஒருவன் பேரு முத்தன். எழுத்து நாலு. (ச = 4) இதை-(ஹு $= \frac{1}{8}$)-வாயில் மாற-இ $= (4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2})$ இதை மருத்தும்-ஹு ($\frac{1}{8}$)ல் மாற-ய $= (\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16})$ இதை பேரெழுத்து-ச-(4)க்குக் குடுக்க ஙய்வு-ஏ வு $= [(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}) =$ (காணி முந்திறி) $= (\frac{1}{80} + \frac{1}{320}) = \left(\frac{4 + 1}{320}\right) = (\frac{5}{320}) = (\frac{1}{64})$]

ஆதலால்-ஹு ரு ஹு : ஏ வு $= [(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}) =$ (காணிமுந்திறி)] என்பது.

ஃ ரு ஃ: ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ ரு = ?) எத்தனை யென்னில்:—.

ஒருவன் பேர் வீரன்:—

எளுத்து - ௩ = (3). இதை - ஐ ($\frac{1}{10}$)ல் மாற = வ ப = [($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{20}$) = ($3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$) = $\left(\frac{5+1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}\right)$ - மத்தும்-ஐ ($\frac{1}{10}$)ல் மாற-

சு வஹ கீ இ ஐ = [($\frac{1}{40}$ + $\frac{1}{320}$ + $\frac{1}{640}$ + $\frac{1}{3200}$) = $\left(\frac{80+10+5+1}{3200}\right)$ = ($\frac{96}{3200}$) = ($\frac{6}{200}$ = $\frac{3}{100}$)] இதை எளுத்து ௩ (3)க்குக் குடுக்க:—

ஈய்வு–ஙி வஹ கீ சபு = [($\frac{1}{160}$ + $\frac{1}{300}$ + $\frac{1}{1600}$) = $\left(\frac{10+5+1}{1600}\right)$ = ($\frac{16}{1600}$) = ($\frac{1}{100}$) = ($\frac{3}{100} \times \frac{1}{3}$)].

ஆதலால் :—

ஐ ரு ஐ = ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$) = (ஙிவஹ கீ சபு) என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லா மிப்படிக் கண்டு சொல்லவும்—.

ஆசிரு விருத்தம்:—

ஐரண்டுள்ள மூனுநீளமொடு நான்குமே
யறைகின்ற சிலையதொன்றுக் கானபணமொன்பது--
விலையாகு, மஞ்சுமுளமகல முடனீட்சியே
தான்செய்ய முளமுள்ள மூவஞ்சுகொண்டசிலை
ஈறைந்து தெரியவிலை காணவே செப்பிவரும்
அகலமுந்தனை மா(ற்)றி-நீள(ள்)மையில்(ர்ச்) சொ(சேர்)வதாக்கி
யெ(யொ)ன்றில் அய்யமில்லாம(ல்) நீர்மாரு மூதலாகுமே
பின்னறைகின்ற ம(வ)கலமதுவுமப்படி நினைந்து
மிக்கானதுடன் மாறியே அன்னதற்கீயுமெனவே—
வையம்புகள (மு) வரும் காணிக்கர்முன்னவே
வகுத்துரை தொகுத்திதனையே மணமாணர் மாமதுக்குண
மாணலலெண் (ண) வரும் வாரு கண்டு கொள்ளவே:— (34)

இதை விரித்துக் காட்டல்:—

௰ (10) முள நீளத்தில்–௪ (4) முள அகலத்தில் சிலை-௧- (1) ரூ விலை ௧ (1) பணம் ஆ. அஞ்சு (5) முள அகலத்தில் - பதினஞ்சு முள (15 = முள) நீளத்தில் சிலை-௰ (10) ரூ விலை யெத்தனை யென்னில்:—

அகலமாகிய நாலும் தன்னை மாற - ௪- ௪: ௰சு = ($4 \times 4 = 16$) நீளமான - ௰ (10) மாற ராசு௰ = ($16 \times 10 = 160$) சிலை ௧ - (1) ல் மாற = (ராசு௰) = ($160 \times 1 = 160$); என்று முதலாய் நிருத்தி:—

பின்னகல மஞ்சும் தன்னை மாற:—

ரு. ரு: உயரு = $(5\times5=25)$ - யரு (15)ல் மாற - ஙாளயரு $(25\times15=375)$. சிலை - ய = (10)ல் மாற - ஙகளாருய $(375\times10=3750)$ இதை முன் னிருத்தின - ாகூய = (160) ருக்குடுக்க ஈய்வு உயங (பணம்) சவ்வு = $[(3750 \times \frac{1}{160}) = (23\frac{7}{16}) = (23.$ பணம் — $4\frac{3}{8})$ (இங்கு ஷை $\frac{7}{16}$ஐ 10ல் பெருக்க $\frac{70}{16}$ ரு வந்தது $4\frac{3}{8})]$ **என்பது.**

விருத்தம்:—

அகலமொரு நான்குப் கனமிரண்டு
நீளமா மிரண்டுடசாண்
முளக்கல் லொன்றுக்கே - பகரில்விலை
பொன்னிரண்டாம் கல்மாருப கர்ந்ததன்
ஞன்கு மிருவதுவாம் - நீளமத்தகைமை
யறுசிலையிரண்டு விலையே தென்னில்
சாத்தியமுத்துகை நான்குந் தனிலேமாறி
நிகரில் முதலாகவு (ம்)
பின்னைந்துதாக்கி நின்ற
முதற் கிப்ந்து—பயனிகழ்த்து வீரே:—. (35)

விரித்துக் காட்டல்:—

ச (4) முள அகலம் - [உ (2) முளகனம்] ரெண்டுமுளகனம் — ய (10) முள நீளத் தில் கல் - க = (1)ரு — பொன் உ (2) விலை ஆ—சு (6) முள அகலம் - ச (4) முளகனம் - இருவது முளநீளம் - கல்லு ரெண்டுக்கு விலை யெத்தனை யென்னில்:—

ச (4) ம் - [உ (2)ம் மாற அ = $(4 \times 2 = 8)$ - இதை நீளம் - ய (10)ல் மாற- அய = $(8 \times 10 = 80)$ இதை கல் - [க = (1)] ல்மாற அய = $(80 \times 1 = 80)$. என்று. நிருத்தி:—

சு - ம் - ச — ம் - மாற - உயச = $(6\times4=24)$ - இதை நீளம் - [உய= (20)]ல் மாற = சாஅய = $(24\times20=480)$ இதைக்கல் — உ (2)ல் மாற சூாசூய = $(480\times2=960)$ இதை பணமாகிய — உய = (20)ல் மாற = யசூசூஉா = $(960\times20=19200)$ இதை முன்னிருத்தின - அய = (80)ருக் குடுக்க ஈய்வு விலை உயச - பொன் ஆதலால்:—

உயச பொன் $=[(\frac{19200}{80}=\mathbf{240})$ இதைஒரு பொன்பணம் 10ல் வகுக்க வேற்படும் பொன்னுக்குச்சமம் $= \left(\frac{19200}{80\times10} = \frac{19200}{800} = 24 = \frac{240}{10}\right)]$

= **24 (பொன்)** என்பது;—

விருத்தம்:—

உன்னிதமா முளப்படுத்தாட கல்லுன்கு
உற்றகன மூன்ருக வுயி(ய) ர்ந்தகல்லே
அன்னியமாய் நீளமறை—அகலந்தானும்
அவ்வடைவே கனமு முறவதுவேதென்னில்:—
சொன்ன முழந்தனைச் சாணய்த்தொகுத்து மாறித்
தோண்டுகல்லு விரலாமுத்து கையைத்தாக்கி
பின்னிரையில் விர(லா)வாக்கிமூன்று - பெருக்கி
யிவர்க்கீய்ந்து — துகைபேசுவீரே $=$ (36)

என்பது:—

விரித்துக் காட்டல்:—

ய (10) முள நீளத்திலே — ச (4) முளவகலத்திலே க (1) முளக்கனத்திலே - கல் (க$=$1) இதை அறை முளநீளம் அறைமுள அகலம்-(இ$=\frac{1}{2}$) அறை முளக் கனம் — துண்டுபண்ண யெத்தனைத்துண்டு காணுமென்ருல்:—

[ய $=$ 10] முளத்தையுஞ்சாண்படுத்த $=$ (உய) $=$ ($10\times2=20$), (ரண்டுசாண் ஒரு முழம் விதம்) ச (4) முளத்தையுஞ்சாண்படுத்த - அ $=$ ($4\times2=8$) இதனுடனே - உய (20) ஐ மாற - ாசுய ($8\times20=160$)- என்று வைத்து:-

கனம் முளம் - க (1) க்கு சாண் $=$ உ (2) — சாண் - க (1)ரு விறல் $=$ யஉ (12) அூ விறல் $=$ உயச $=$ ($12\times2=24$) இதை முன்னிருத்தின—ாசுய (160)ல் மாற ௩௲அாசய $=$ [(160×24) $=$ (3840)] இதனை (க $=1$)ல் மாற-௩௲அாசய $=$ (3840) என்று நிருத்தி :—

நீளம் முளம்-(இ $=\frac{1}{2}$)ரு சாண் (க $=$ 1)ரு விறல் $=$ (யஉ $=$ 12). இதனைக் கல்முளம் (இ $=\frac{1}{2}$)ரு சாண் (க $=$ 1)ல் மாற—(யஉ $=$ 12). இதனை முன்னிறுத்தின — ௩௲அாசய (3840)க்குக் குடிக்க ஈய்வ $=$ [(௩ாஉய) $=\left(\frac{3840}{12}\right)=$ (320)]. என்பது.

முந்திரி முதலாய் ஒன்றின்வறை துகை மொளிய வென்னில்:—

விருத்தம் :—

வந்திடு மொன்றே முன்னி
திருவதாய் வருத்துதற்கே
சுந்தரமாகரற்றினச்
சுருக்கத்தைப் பெருக்கிமானே—
சிந்த முந்திரியில் வைத்தே
செப்புநீ இவை கடனே $=$ (37)

ஙூ (முந்திறி) முதலாய்-க-வறைக்கும் (முந்திறி முதல் ஒன்று வறைக்கும் $= \frac{1}{320}$ முதல் 1 வறை) யெத்தனை யென்னில் :—

(க)ரு-ஙூ-கூஉயி (ஒன்றுக்கு முந்திறி யென்பது முன்னூற்றிறுபத்தில் ஓர் பங்கு அதாவது இதன் $= \frac{1}{320}$). செற்றினச் சுநக்கந் தாக்க-ருயி-க-சு —கூசுயி- இதை - ஙூ-ல் கழிக்க — ௱சுயி - இ - ∴ ஙூ-முதல்-க-வறைக்குந் துகை- ௱சுயி இ $= (160\frac{1}{2})$ என்பது:—

கட்டளைக் கலிப்பா :—

ஒரு பத்தே யடி ஓடி பின்னுறினிலுற்ற
மீளுங் குதிறைக்கே தான் விலை—
தருவரஞ்சுபொன்—னெட்டடியோடியே
தருகியஞ் சடிமீள பரிக் கேத்தபொன்-
(வளுத்துவதே தனில் முன்மொழி செண்டொன்றாய்
வைத்த பின்னு(தா)தம்படியாகவே அருமையாம்)
பொன்னுடன் மாறி முன்னவர்க்
காணுமீய்வை யறைந்திடவேணுமே $= (38)$

யி (10) அடி ஓடி—சு (6) அடி மீளுகிற குதிரைக்கி விலை ரு பொன் $=$(5 பொன்) ஆ - அ (8) அடி ஓடி—ரு (5) அடி மீளுகிற குதிறைக்கி எத்தனை பொன்னென்னில் :—

யி (10)ட்—சு (6)ம்—யிசு (16) என்று நிருத்தி—பின்—அ (8)ம்—ரு (5)ம்—யிங $=$(13). இதை அஞ்சு (5) பொன்னாகிய—$(5 \times 10) = (50) =$ ருயி-ல் மாற சுரு௱ருயி $(13 \times 50 = 650)$. இதை முன்னிறுத்தின – யிசு (16)ருக்குக் குடுக்க ஈய்வு சயிஇஅ $(= \frac{650}{16} = 40\ \frac{5}{8})$ ஆதலால் நாற்பதரையேயிக்கால் [(சயிஇஅ $= (40 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}) = (40\frac{5}{8})$] பொன் என்பது:—

விருத்தம்:—

கந்தகம் வெந்தணலாயம் கருது நூத்திருவதுக்கே
வந்தமொருபலமதாக மருபடியடி சாலத்தந்திடும்—
படியொ(யோ)றைந்து-தாத்திராலண்று (திராலான்று)
மூன்று-உந்திய நலமுமேழு (வொ) மொன்பது
மென்பதாமே— (39)

கொச்சகம்:—

நாலொன்ம (ப) தாங் குன்றி
நவிலுமதி னவ்வளவும்—எலுவையிற்பாதி
ஏற்றந்த பாதியனுகூல
முன்னுறைத்த குரு
(க)கொன்றுமே கூடச்சா(ல்)லு
நூருனதென்று சாத்தியது மெய்யாமே $=$ (40)

வெண்பா:—

பத்துமதிளுடையப் பார்வேத்தன் கோட்டைக்கி
வைத்தமதிளிடை (யி) லே வாசலாம்—
அத்திநீர்—உண்ணும் போதேகில்-
(ஒன்று) ஒண்ணுமுதல்ப்
பத்தளவு மென்று
நீரே மாண்டிருந்து = (41) என்றது.

முதல் வாசல்வறைக்கும் யானை-உகூறாஉ0 (2520) என்பது—

வெண்பா:—

கன்னல்மொளி ஒன்பான்காசு துவமேயாகத்
தின்னவர்கள (ளெ) ன்னவிலே செப்பமே—
கன்னல்மொளி (ஒரொன்பதென்பதின் படியடி)
த்துகையதற்கே - ஒரொன்பதை ஈய்ந்துறை = (42)

என்பது.—

க (1) முதல் கூ (9) வரைக்கும் படியடித்துகை—சாரு = (45) – இதற்கு - கூ (9) குடுக்க ஈய்வு (சாடு $=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$) ஆதலால்:—

கொளுத்தாடைக்கி [அ = (8) = ?] தண்டுத்த (அதனடுத்த) மொளிக்கி— இந்தப்படி பொளி (ழி) க்கு மொளி - சாடு ($=\frac{1}{5}$) அதியப் (அதிகம்) கூட்ட கூ·கூ (9—9) சரி :—

விருத்தம்:—

நூருடனூரைமாரை(ற)னுவன்றிடு நூறுக்கிகதான்-
கூறியதானமூன்றாய் கொண்டிருவரைக்கும்-
ஆரினிலொன்று நீக்கலஞ்சு முன்னதுவைமாறித் தெரிய
வஞ்சுத்தானம் செப்பிடிற் குளிப்பத(மா)மே = (43)

என்பது:—

ள ரு ள எத்தினை (=100×100=?) யென்னில்:— க - ய-ள - ஆறு தானம் - ௩ (3); மத்த நூறுக்குத் தானம் - ௩ (3) – ஆறு த்தானம் - ௬ (6) - க (1) போக - நீ ருத்தானம் - ௫ (5) - நிருத்தி ள.ரு இனம் - க = (1), மற்ற நூருக்கும் இனம் (க-) = (1); மாற – க - க - இதை நிருத்தி ௫ (5) மட்டும் நடத்த:—

— க - ய - ள - ௲ - ய௲ - ஆதலால்:--
ள ரு ள: ய ௲ = (100×100=10000) என்பது—

தாளிசை:—

நாலஞ்சனில்மாகாணி இவற்தெ (இவற்றை) வருலக்கம்—
நவமாகவேதன்னை - மாருவா நவியாவண
மிந்தக்கோல்(ெ)சரி - வீசந்தன்னை—
மேல்கொண்டது சரியாய்க் குணமாமிருபத்துமே—
யதிலித்த வாக(வே)தாக்கி
யாவருசரிவளிமாதை
முன்னறிவாகிய வீசத்தைங்கா லொருவகை யென்று
கையன்றிமேலஞ் ஞலெனத்தாறெரு—
வீசந்தனைமாறி வேண்டுந்துகை ஒன்றுகவே—
விளத் (விள்ளத்) துணிவீரே— **(44)**—

என்பது;—

மகாஹதாஸ ரு மகாஹதாஸ குழி = ($19\frac{15}{16} \times 19\frac{15}{16}$ ரு. குழி) யெத்தனை யென்றால்:- மகாஹதாஸ ($19\frac{15}{16}$) யுடனே ய ($\frac{1}{16}$) கூட்ட— உம [($19\frac{15}{16}+\frac{1}{16}$) = (**20**)] உம. ரு உம: சா = ($20 \times 20 = 400$)—ல் உம. ஆ: உஇ = ($20 \times \frac{1}{8} = 2\frac{1}{2}$ தள்ளி ய. ரு. ய: வுதகீவ =($\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$) கூட்டி. ஙாகுமன இ வுதகீவ $= [(397 + \frac{1}{2} + \frac{1}{320} + \frac{1}{1280}) = \left\{(397) + \frac{(640+4+1) = (645)}{1280}\right\}$ $= (397+\frac{129}{256}) = (397\frac{129}{256})]$ என்பது.—

—(வேறு)—

கட்டளைக்கலிப்பா:—

வட்டமான நிலம் அளக்கும் வகைக்கு :— விபரம் :—

வட்டமனை நிலமளக்கும் வகை வளு(மூ)த்துவேன்
காணிக்கா ? முன்னுகவே தொட்ட கோலொரு
நூறுடனன் பதா (150)ய்த் தொகுத்த
கோலஞ்சு வீச ($\frac{5}{16}$ = **ஐவீச**)த்துளாக்கியே
இஷ்டமாகத்தனைத்தன்னில் மாறியே
யெத்த மாங்குளி இன்னவை யென்று தான்
சட்டமாயுறை **வட்டமும் விட்டமே**
சாற்று மூன்றெருறைல் மாவை யெண்ணியே = (45)

ஞ. மூன்றெருனுல் மா $= [\left(\frac{16}{5}\right) = (3 + \frac{1}{5}) = (3\frac{1}{5}) = (3\frac{2}{10}) = (3{\cdot}2)]$

என்பது :—

வட்டமான நில மளக்குமிடத்தில் வட்டச் சுத்தளவு = ாடுல் (= 150) இதை விட்டம் பண்ண — (வ ய) = ($\frac{5}{16}$) வாயில் கழிக்க — [(ச ம சு த ஷ) = ($46\frac{7}{8}$)] = **நாற்பத்தாரே முக்காலேரிக்கால்**) = [($150 \times \frac{5}{16}$) = ($46\frac{7}{8}$)] இதைத்தன்னில் மாற — உகுாகுமன வஉவுத = [($2197+\frac{1}{4}+\frac{1}{80}+\frac{1}{320}$) $= 2197 + \frac{(80 + 4 + 1 = 85)}{320} = 2197 + (\frac{17}{64})] = [46\frac{7}{8} \times 46\frac{7}{8}) =$ $\left(\frac{140625}{64}\right) = ($ஞ $= 2197\frac{17}{64})$] இதை—ப—(= $\frac{1}{16}$) வாயில் கழிக்க —

ரகூயின வயதுவது $= [\,(2197\tfrac{17}{64})\,(\tfrac{1}{16})\,] = [\,(\tfrac{1}{16} \times 2197) + (\tfrac{17}{64} \times \tfrac{1}{16})\,]$
$= [\,(137\tfrac{5}{16} + \tfrac{17}{1024}) = (137 + \tfrac{5}{16} + \tfrac{17}{1024})\,] = [\,(137) +$
$+ \left\{\dfrac{(320 + 17) = (337)}{1024}\right\}\,] = [\,(137\tfrac{337}{1024})\,] =$ ௐ $[\,(137) +$
$(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{80} + \tfrac{1}{320})\,] = [(137) + \left\{\dfrac{(80+20+4+1)=(105)}{320}\right\}$
$= \left\{(137) + (\tfrac{105}{320} = \tfrac{21}{64})\right\} = 137\tfrac{21}{64} = (137\tfrac{337}{1024} = 137\tfrac{21}{64})$
$= (137{\cdot}328125)$

$(\tfrac{21}{64}) =$	$(0{\cdot}328125)$	நபம் வித்யாசம் பலம்சமமே
$(\tfrac{337}{1024}) =$	$(0{\cdot}328125)$	

$\therefore\ [\,137\tfrac{21}{64} = 137\tfrac{337}{1024}\,]$

இதை வது $(\tfrac{1}{320})$ வாயில் களிக்க — வ ௱ சு வது கீ வயது வது =
$[\,(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{20} + \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{320} + \tfrac{1}{1280} + \tfrac{1}{5120} + \tfrac{1}{25600} + \tfrac{1}{102400})$
$= \dfrac{(25600 + 15360 + 2560 + 320 + 80 + 20 + 4 + 1)}{102400} = \tfrac{43945}{102400}$

$$= \left(\frac{8789}{20480}\right) = \left\{\frac{1}{2{\cdot}330185\frac{4035}{8789}}\right\} = (\mathbf{A}).$$

என்றுகின்றது:—.

கேவலம் தமிழ் லக்க (பின்ன) மின்றியே கணிதத்தை நேர்நடத்த:—

$$150 \times \frac{5}{16} = \frac{750}{16} = \frac{375}{8}.$$

$$\left(\frac{375}{8}\right)^2 = \left(\frac{140625}{64}\right) = 2197\tfrac{17}{64}$$

$$\frac{140625}{64} \times \tfrac{1}{16} = \frac{140625}{1024} = 137\tfrac{337}{1024}.$$

$$\left(\frac{140625}{1024} \times \tfrac{1}{320}\right) = \left(\frac{140625}{1024 \times 320}\right) = \left(\frac{140625}{327680}\right) = \left(\frac{28125}{65536}\right);$$

$$\left(\frac{28125}{65536}\right) = \left\{\frac{1}{2.33017\left(\frac{-3125}{28125}\right)}\right\}$$ $=(\mathrm{B})$ என்றுகிறது.

ஆதலால் இங்கு மேலே காட்டிய (A) க்கும் (B) க்கும் உள்ள தாரதம்ய
கணப்புத்திமான்கள் அவசியம் ஆலோசிக்க வேண்டியதாகும்]—

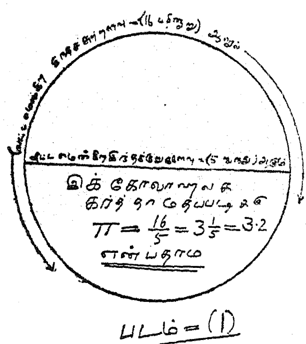
ஆதலால்:— வட்டம் - ௩௰௨ - ரூ வ ௰ சு வுக ௯ வ ய ௩ ஐ - ரூ - விட்டம் - ௰ (10) ரு வட்டம் யெத்தனை யென்னில்:— ௩சுபு ($=3\frac{1}{5}$)ல் பெருக்கி-௩௰௨ =

$$\left(32 = 10 \times 3\tfrac{1}{5} = 10 \times \frac{16}{5} = \frac{160}{5}\right)$$ என்று சொல்வது.

இனி இந்த வட்டமனை வட்டகிலம் அளக்கும் வகையில் சம்மந்தப்பட சில முக்கிய விசேஷங்களைக் கீழ்விளக்கும் விவரணத்தில் காண்க:—

இந்தக் கணிதப் புத்தகக்ர்த்தாவால் சமவட்டத்தைக் கொள்ள வேண்டியதற்கு:—

விட்டம் என்கிற குறுக்களவு 5 (ஐந்து) ஆகில் இதற்குறியச் சப (ச்சுற்று) வட்டம்16 (பதினாறு என்றபடிக் கமைந்திருக்கிறது. இவர் சம்மதப்படிக்கு.



படம் = (1)

ஆகையால் தான் முன்னேயே விட்டம்—௰ (10) ஆனால் வட்டம் - ௩௰௨ (32) என்று கூறி இருக்கிறார். உதாரணங் கவனிக்க இது புலப்படும். $\frac{32}{10} = 3{\cdot}2 =$ ௩சுபு இதனால் விட்டம் - 1க்கு வட்டம் மூன்றுடன் கூடிய நாலுமா என்பதை நன்கு விளக்குகிறார் உதாரணத்தில்.

($\therefore$ நாலுமா = சுபு = $\frac{1}{5}$ = $\therefore 3 + \frac{1}{5} = 3\frac{1}{5} = 3{\cdot}2$ என்பது.)

முதலில் கோடுகளைப்பற்றிய வரையில் கவனிக்க வேண்டியவைகளாவன:—

இந்தக்கணிதக்கர்த்தாவால் க்ஷேத்ர (நில) விஸ்தாரத்தை (விசாலத்தை = குழியை) ப்பற்றி வெகுவிஸ்தாரமாக வர்ணிக்கப்பட்டிருக்கிறது, கணித மார்க்கத்தில் இதற்குப் பற்பல உதாரணங்களுங் காட்டியிருக்கிறார். நீண்ட சதுரச்சம்பந்தமாகவும், சமச்சதுரச்சம்பந்தமாகவும், இவ்வித விசாலங்கள் அடியோடில்லாமல் கேவலம் தீர்க்கமாக இருக்கும் க்ஷேத்ரத்தைத்தான் கோடு (ரேகை) என்று சொல்வது உலக இயல்பு. இந்த ரேகைகள் இருவிதப்படும். ஸமமென்றும், வக்ரமென்றும்: ஸமமென்றால் நேராகப் போவதும், வக்ரமென்றால் (கோணலாக) வளைந்து போவதுமாம்.

நேராகப் போகுங் கோட்டைச்சார்ந்தவைகளே ஸமக்ஷேத்ரங்களும், விஷமக்ஷேத்ரங்களும்: இதற்குள் முக்கோண க்ஷேத்ரம்முதல் பல கோண க்ஷேத்ரங்கள் பர்யந்தம் இஷ்டப்படிக்கு அடங்குகின்றன.

வக்ரமாக (கோணலாக) போகுங் கோட்டை யனுசரித்ததுத்தான் வட்டமனை, வட்டகிலம் முதலிய விருத்தக்ஷேத்ரங்கள், இந்த வட்டத்தில் நீண்ட வட்டமென்றும், பூர்ணச்சம வட்ட மென்றும், அறை முதலிய பலவித வட்டங்கள் உருவத்தில் வெவ்வேறு விதமாக நம்மால் காணப்படுகின்றது. துறவுகள்; வண்டிச்சக்கரம், பந்து முதலிய; வட்ட (கோல) இனத்தைச் சேர்ந்தவைகளே.

இந்த வட்டசப்பந்தமான விசாரங்கள், பூர்வகாலத்திலிருந்தே வெகு சூக்ஷ்மமாக; ஆர்யபட்டர், வராகமிகிரர் - சூரியன் வியாஸர் வஸிஷ்டர் - பாராசரர்முதலிய மகான்களால் தொன்று தொட்டு நன்கு விளக்கப்பட்டு வருகிறது:

இவர்களால் விட்டம் - (20000) ஆனல் வட்டம் (62832) என்று நிச்சயிக்கப் பட்டிருக்கிறது.

இவர்கட்கு விரோதமாக ஸ்ரீதரர் முதலிய கணித பண்டிதர்கள் விட்டம் ஒன்றானல் இதற்குச் சுற்றளவாகிய வட்டம் பத்தின்வர்க்கமூலம் $\sqrt{(10)}$ என்கிறார்கள்.

(10ன் வர்க்கமூலம்) = $\sqrt{(10)}$	=	3·1623
ஆர்யபட்டாதியர் வட்டம்	=	3·1416
இவற்றின் வித்தியாசம்	=	0·0207

(இந்தக் கணிதகர்த்தாவின் ஒன்றான விட்டத்தின் வட்டப் பரிமாணம்) = 3·2000

இப்படிப் பூர்விகர்கள் காலத்திலேயே விட்டத்துக்குறிய வட்டத்தைப் பல வித்யாசத்தோடு வழங்கிக் கொண்டார்கள். ஆனபோதிலும் கணிதப்புலவரான - பாஸ்கரர் முதலியவர்களால் விட்டம்-1-ரு வட்டம் (3·1416) என்றே அங்கிகரிக்கப் பட்டிருக்கிறது. இந்த (π = 3·1416)ஐ யனுசரித்தே நவீனர்களின் கணிதங்களும் லாகரிதும் முதலிய நவீன அளவு முறைப்படிக்கு சூக்ஷ்மமாகச் சாதனஞ் செய்யப்பட்ட ஓர் விட்ட வட்டம் = (3·14159265358979 32) = π.

இந்த விகித சாப்யத்தைக் கொண்டே த்ரிகோணமிதி முதலிய-வான கணித உபகரண கணிதங்களையும் நடத்திவருகிறார்கள். (கோலகணிதத்துக்கோ இந்த க்ஷே π தான் மூலாதாரமாகும். இதுவின்றியங்கு, ஏதும் நிகழ்த்தவே முடியாது)— த்ரிகோணமிதியிலும் ஸமல (ப்லேன்) த்ரிகோணமிதி, சாப (ஸ்பெரிகல்) த்ரிகோண மிதி யென்று இருவிதம். இவைகட்குறிய கணித உபகரணங்கள்.

(1) புஜஜ்யா = ஸைன் (SINE)
(2) கோடிஜ்யா = காஸ் (COSINE)
(3) உத்க்ரமஜ்யா = வர்ஸ் (VERSEDSINE)
(4) கோட்யுத்க்ரமஜ்யா = குவர்ஸ் (COVERSEDSINE)
(5) ஸ்பர்சரேகா = டான்ஜென்டஸ் (TANJENT)
(6) கோடிஸ்பர்சரேகா = கோடான்ஜென்ட (COTANJENT)
(7) ஸ்பர்சகர்ணம் = ஸீக்கன்ட் (SECANT)
(8) கோடிஸ்பர்ச கர்ணம் = குஸீக்கன்ட் (COSECANT)
(9) புஜஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = கார்டு (CHORD)
(10) கோடிஜ்யோஜயாகர்ணம் = குகார்டு (COCHORD)
(11) புஜ; கோடி; கர்ண; கோலஸந்தி = வர்ட்டக்ஸ் (VERTEX)

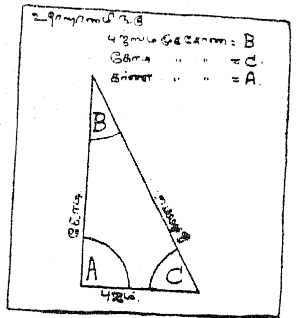
என இப்படிப்பல அவயவங்களுள்ளவைகளாக இருக்கின்றன—.

எப்போ ஓர் கர்ணம் ஏர்படுகிறதோ இதாகிற அறை விட்டத்தையுடைய ஓர் வட்டம் அவசியம் ஏற்பட்டேயிருக்கும். கர்ணமேற்பட்டபோது புஜகோடிகளு மிருக்க வேண்டியதாகிறது. இம்மூன்றவயவங்களும் தெரியும்போது இவை களின் பரஸ்பர ஸம்பாத, ஸம்முக, கோணங்களும் உண்டாகின்றன. ஆனால் இவைகளில் சில தெரிந்தவைகளும், சில தெரியவேண்டியவைகளுமாகவே இருக் கும். இதற்காகவேதான் ஸகலகணிதப்ரபஞ்சமும்.

மேற் கூறிய உபகரணங்கள் கேவல ஸால க்ஷேத்ர ரூபமான ஜ்யாமிதியில் அமையும் போது அந்த ஜ்யா முதலிய சப்தங்கள் போய்-கேவலம்-புஜம், கோடி, கர்ணம், ஸம்பாத, ஸம்முககோணம், என்ற இவைகள்தான் பெயர்கள் உடைய வைகளாக நிற்கின்றது. இந்தக் கோடுகளை அனுசரித்தே இதுவரையில் கிரந்த கர்த்தா கூறிவந்த நில அளவை வட்டம் முதலிய கணித விகிதங்களும்.

இப்படிக் கண்ட கோடுகளின் ஒரு பக்கக்கோடு புஜமும் இதற்கெதிர்க் கோடு கோடியும், இவ்விரு நுனிகளின் ஸம்பாத சேர்க்கைக்கோடு கர்ணமும், ஆக அழைக்கப்படுகிறது.

இப்படத்தில் கண்ட AC = புஜம், AB = கோடி BC = கர்ணம், எனப்படும். எப்போதும் புஜகோடி களை விடக் கர்ணம் நீண்டும், கர்ணத்தை விடக் (கோடி புஜக்கூடல்கள் (கோடி + புஜம்) அதிகமாகவே இருக்க வேண்டியதாகின்றது நிபந்தனையே — இல்லை யேல் உருவமமைவதில்லை.) ∴ (கோடி + புஜம்) > கர்ணம்.



(படம் = 2)

இவ்வித உருவைச் சார்ந்த சில விசேஷ கணி தங்களை (இந்தக் கணிதக்கர்த்தாவால் விடப்பட்ட சில விசேஷங்களை), வட்டச் சம்பந்தமான கணிதம் முடிந்த பின்பு கூடியவரையில் வெகு சுருக்கமாகக் கூறுவோம். இவைகளில் விசேஷங் கள் வெகுவாயுள்ளன மாத்திரம் கணிதத்தில் காட்டப்படுகிறது.—

நூதனக்கணித அளவுமுறைப்படிக்கு லாகரிதும் (காதாங்கம் = லகுரிக்தம்) முதலியவைகளால் நவீனர்கள் ஏற்படுத்தப்பட்ட (π)யின் விகிதம் (3·1415926535897932) என்கிறபடிக்காகும்.

விருத்தார்யபட்டால் செய்யப்பட்டதும் பௌருஷக்கிரந் தங்கட்கே முதலாவதுமான நான்கு பாதங்களைக்கொண்ட ஆர்யபட்டீயம் என்கிற மூலக்ரந்தத்துக்கு ஒருவர் (வியாக்கியானம்) வெகு விமர்சன விஸ்தாரமுள்ள உறை செய்திருக்கிறார்.

இப்புத்தகத்தின் காப்பிதற்சமயம்: அடையார் அனிபெஸண்ட் லைப்ரரியில் தெலுங்கெழுத்தில் ஸம்ஸ்க்ருத பாஷையில் ஓர் காப்பியும், தேவநாகரியில் ஸம்ஸ் க்ருத பாஷையில் ஓர் காப்பியும் ஆக இரண்டு காப்பிகள் இருக்கின்றன—முதலில் சொன்னது சிதிலமாயிருப்பதால் இரண்டாவதைப் புதிதாகக் காப்பியும் எடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. (அதில், உள்ள ஸம்ஸ்க்ருத பாஷைக்கு நேர் செய்த தமிழ்)

—அந்த உரைக்கு **பாஷ்யம்** என்கிறபெயர்—இதற்குக் கர்த்தா "நீலகண்ட ஸோம ஸுத்வா" என்கிற பேருடையார். இவர், திருக்கணித கர்த்தாவும் ஆர்யபட்டீய மற்றோர்வ்யாக்யான மாகிய படதீபிகா கர்த்தாவுமான ஸ்ரீபரமேசவருசார்யர் தனயன்; தாமோதரபண்டிதரின் சிஷ்யர், ஸ்ரீ குண்டம் என்கிற கிராமத்தில் வஸித்தவர். கார்க்யகோத்திரத்தில் பிறந்தவர், இவர் காலம் சுமார் A. D. (1450 to 1550) இந்த நீலகண்ட ஸோமஸுத்வா என்பவர் சொல்லுகிறார் :—

ஸங்கம கிராமத்திலிருந்வருகிய "மாதவன்" என்பவர் மிக்க சூக்ஷ்மத்துக்குச் சமீபமாயிருக்குந்தன்மை வாய்ந்த "**பரிதி**" (சுற்றளவைச்) சொல்லுகிறார் என்கிறார்:—

அப்படி அந்த மாதவன் என்பவர் சொல்லும் பரிதியளவோவென்றால்:—

இங்கு வ்யாஸம் = நவநிகர்வம். இதற்குச் சமம் = (900000000000) ஆகும், இதற்குப்பரிதி என்கிற சுற்றளவுக்குச் சமம் = (2827433388233) இதுவாகும் $\left(\frac{\text{பரிதி}}{\text{வ்யாஸ}}\right) = \left[\frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}}\right] = \left\{ \text{ஷை } \frac{2827433388233}{900000000000} \right\} = \pi =$ (பையளவு) $= (3{\cdot}14159265359\tfrac{2}{9})$. இவ்விதம்; நீலகண்ட ஸோமஸுத்வா சொல்லிய மாதவன் என்பவர்; பண்டிதர்கள் ஷை யளவுப்படி சொல்லுகிறார்கள் என்கிறார்.

நீலகண்ட ஸோம ஸுத்வா காலம் = (AD-1450 to 1550) இதற்கு முன் மாதவ பண்டிதர் காலம் எப்போ என்பது தெரியவில்லை இவருக்குபதேசித்த மூலபந்யத்துக் குறிய கர்த்தாவும் எந்த காலத்தில் என்று விளங்கவில்லை. ஆகையால் (ஷை $\pi = 3{\cdot}14159265359\tfrac{2}{9}$.) என்பது. ஆர்யபட்டர்காலம் (AD = 500) இதற்குப் பிறகு (AD = **1500**) இதற்கு முந்தியுள்ள காலத்தில் ஏற்பட்டிருக்க வேண்டும். இந்த மத்தியிலுள்ள (1000) ஆயிரம் வருஷத்தில் வெகு கணித ஸமர்த்தர்கள் இருந்திருக் கிறார்களிங்கு என்று ஏற்படுகின்றது.

இதனால் :—

ஆர்யபடர் ; வராஹமிஹிரர் முதலியோர் காலத்திய விட்டத் துறியவட்டம் $= \frac{62832}{20000} = \frac{3{\cdot}1416}{1{\cdot}0000}$, $= (\pi)$ என்றும், இதற்குப் பிந்தி (அதாவது AD = 500 to 1500) ஆகிய, இந்தக் காலத்தில் :—

$$\pi = \left(\frac{2827433388233}{900000000000}\right) = \left\{\frac{(3{\cdot}14159265359\tfrac{2}{9})}{(1{\cdot}000000000000)}\right\}$$

$= (3{\cdot}14159265359\tfrac{2}{9})$ என்றும் ஏற்படுகிறது:—

சுமார் (AD 1550)க்குப் பிந்தி மேல் நாட்டார் கீழ் நாட்டார் முதலிய பல நவீனர்களால் நவீனகணித அளவு முறைகளைக் கொண்டும் ஷை (π)யை இவர்கள் :—

$\pi = 3.1415926535897932 \ldots\ldots\ldots \rightarrow \ldots$ என்கிறார்கள் :— இவர்கள் சம்மதப்படி ஷெக்கு ஸ்தானம் இவ்வளவுதானு இன்னும் மேலு முண்டா என்றால்:— இதனுடைய ஸ்தானத்துக்கு முடிவான அளவே கிடையாது. (———→) இவ்விதக் குறியிருந்தால் முடிவின்றிச் செல்வதையே காட்டும்.

இங்கே ஷெ ($\pi = 3{\cdot}1415926535897932 \rightarrow$) ஐ இதற்கு மேலும் சொல்லாமல் ஏனிங்கு இதுபர்யந்தம் நிருத்தினுய் என்று கேள்வியும் எழும்புகிறது. இதற்குத் தக்கச் சமாதானம் யாதென்றால்:—

ஆர்பட்டாதியர் சம்மத ஒரு விட்ட வட்டம் $= 3{\cdot}1416$
ஸ்ரீதாாதியர் சம்மத ஒரு விட்ட வட்டம் $= 3{\cdot}16228$

ஷெ இரு மதங்களின் வித்யாஸம் $= 0{\cdot}0207$

இக்கோலாகலக்கர்த்தாவின் சம்மதப்படிக்கோ ஒரு விட்டதின் வட்டம் $= 3{\cdot}2$ என்பது. இவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுக்கொன்று வித்யாஸமாக இருப்பது போலவே நவீனர்களுக்கு வெகு சம்மதமாக இருக்கும் இந்த $\pi = (3{\cdot}1415926535897932 \longrightarrow) = 180^\circ$க்கு ; இவ்வித மேற்பட்டதற்கும் கணித மூலமுண்டு. இதன் பலவிகித விவரணம் சுருக்கமாகக் காட்டப்படுகிறது.

MACHIN (மேஷின்) மதப்படி கற்பனை

அதாவது:—

$\because (4$ ஸ்ப$^{-1}\,\frac{1}{5} -$ ஸ்ப$^{-1}\,\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$ இதற்கு லாகரிதும் படிக்கு

ஏற்படுஞ் சமீகரண ஸூத்ரம்:—

இங்கு $(\frac{1}{5} = \frac{2}{10})$ எனக் கொண்டால்:—

$$\left[16 \left\{ \frac{1}{1}\left(\frac{2}{10}\right)^1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{2}{10}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{10}\right)^9 - + - + \longrightarrow \right\} \right.$$
$$\left. (-4)\left\{ \left(\frac{1}{239}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7 + - + \longrightarrow \right\} \right]$$

இங்கு வந்தஸர்வதன எண் $= 3{\cdot}201025 \ldots$
,, ,, ,, ருண எண் $= -{\cdot}059433 \ldots$

ஷெ இரண்டின் வித்யாஸம் $= 3{\cdot}141592 \ldots \rightarrow = \pi = 180^\circ$க்கு.

இவ்விதம் (டான் $30^\circ) = 57735 = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$ இதையும் லாகரிதும் படி ஸூத்ர ஸமீகரணஞ் செய்ய:—

$$\left\{ \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^1 - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3 + \left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^5 - \left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^7 + - + - + \rightarrow \right\} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$\therefore \pi = (6 \times 0{\cdot}5235988) = 3{\cdot}1415928 \ldots \rightarrow = 180^\circ$

மேலே காட்டிய இருவித வழிப்படிக்கும் ($\pi = 3{\cdot}14159 \ldots \rightarrow$)ஐ சில ஸ்தான பர்யந்தம் கணிதம் செய்ய ($3{\cdot}1415926575897932 \ldots \rightarrow$) என்றேற்

படுகிறது. இதற்கு மேல் ஷை இருவித வழிகளின் விடைகளுந் தாரதம்ய மடைகின்றது. (கணிதவிஸ்தாரபயத்தால் அவ்வளவு பர்யந்தம் கணிக்காமல் மூலவழியை மாத்திரமிங்கே காட்டியது.) அவ்வித வித்யாஸ மறிய ஆசை உள்ள வர்கள் மேற்காட்டிய வழிப்படி கேவலவ்யக்த்த கணிதத்தால் ஷை. வித்யா ஸத்தைத் தெரிந்து கொள்ளலாம். இதன் பேச்சிங்கு வந்ததன் காரணம்:— பூர்வீகர்கள் காலத்தில், விட்டத்தின்வட்டவித்யாசம் எவ்விதம் முன்காட்டியபடிக் கேற்பட்டதோ மதபேதத்தால்; அவ்விதமே இக்காலத்திலும் நவீன முறைபடி காட்டிய இருவித வழியையும் பின்பற்றியவர்களுக்கு பலத்தின் (விடையின்) வித்யாஸத்தால் மதபேதம் உண்டாகின்றது. இந்த இரண்டாம் வழிபடிக் கேற்படும் வித்யாஸத்தைக் கண்டு பிடித்துக் கூறியது முதலில் நான்தான். இது சுமார் (**AD = 1940**ல்) என்னல் கண்டறியப்பட்டதாகும்.

இந்த (π) பரிமாணம்-கணிக்க மூன்றும் வழியுமுண்டு:—

கேவலம் புஜஜ்யா (ஸைன் θ) விலிருந்தே லாகரிதும்படி கண்டறியப் படுகின்றதாகும்:—

இங்கு (ச) = ஸை $30^0 = \frac{1}{2}$ ஆனல்:—

$$\pi = 6\left\{ச + \frac{1}{2}\cdot\frac{ச^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{ச^5}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{ச^7}{7} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{ச^9}{9}\cdots\rightarrow\right\}$$

இங்கு:— ச = $\frac{1}{2}$ = ஸை 30^0க்கு

$$\therefore \frac{\pi}{6} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot3\cdot2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot2} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot2} + \ldots\rightarrow\right\}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \times 6 = \pi = (3\cdot14159265\ \ldots\ldots\rightarrow)$$ம் வரும்.

இதுபோல் ஷை π ஐக் கணிக்க இன்னும் பலவழிகளும் உள்ளன.

தற்சமயம் கிரககணித உபகரண சாதனங்கட்கு இந்த π (பை) யை = 3.1415926535897932... இந்தஸ்தானத்துக்குமேல் கொண்டு கையாண்டதாகத் தெறியவில்லே. தற்சமயம் புழக்கத்தில் ப்ரசித்தமாக இருக்கும் சேம்பர்ஸ் மேதமேடிகல் டேபிளேக் கண்டவர்கட்கு ($\pi = 3.1415926536$) இந்த ஸ்தா னத்துக்குமேல் கையாளவில்லே என்பது நன்ருகத் தெரியும். டேபிலுக்குட் பட்ட ஸைன் முதலிய (வானகணித) உபகரணங்களும் (7பிகர்) ஏழுஸ்தானத் துக்குமேலில்லே. ஒன்பது ஸ்தானத்தில் அறைகுறையுடன் எங்கேயோ சிற்சில விடங்களிலிருப்பதாகச் சொல்லிக்கொள்கிருர்களே தவிர நேறில் கண்டோர் யாருமிலர்.

தற்சமயம் உபயோகத்திலிருந்து வரக்கூடியவை.

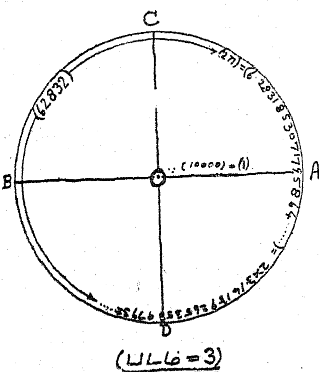
$\pi = \left(\frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}}\right) = \frac{3}{1}; \left(\frac{16}{5}\right)\frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, 3.14159265359.... \rightarrow$

இவைகள் ஒன்றுக் கொன்றைவிட சூக்ஷ்மங்கள் (சுத்தங்கள்) ஆகும்.

$\left\{\frac{31416}{10000}\right\}$ = ஷ $\pi = \left(\frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}}\right)$ ஐக் கொண்டு கவிக்கவேண்டிய வட்ட உருவக் கணிதங்கள் விவரிக்கப்படுகின்றது.

ஆரியபட்டார்ல் நிச்சயிக்கப் பட்ட $\left\{\frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}} = \frac{62832}{20000} = \frac{3927\times16}{1250\times16} = \pi\right\}$ ∴ பாஸ்கார் மதப்படிக்குறிய $\left\{\frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம}} = \frac{3927}{1250},\right\} = \left\{\frac{3\cdot1416}{1\cdot0000}\right\}$ தற்சமய உலக வழக்கிலுள்ளவை யிவைகளே.

(1) ஸமவட்ட க்ஷேத்ரகணிதம். (சிலவிவரம்) இங்கு (θA) = அறை விட்டம் = 10000 ∴ ஆனல் ⊙ = (ADBC) = 62822 ஆகும். (AB) = விட்டம் = முழுவிட்டமானல் ⊙ = (ADBC) = 31416 என்றாகும் (AB) = 1 = ஒனறாகக் கொண்டால் ⊙ = (ADBC) = $\left(3\frac{14159265358979 32}{10000000000000000}\cdots\right)$ = 3·14159265358979 32 . . . . →என்றாகும் இஷ்டம் போல் கொள்க (. . . .→) இக்குறிப்பு முடியாமல் (சணிக்கும் எண்கள்) போவதைக் காட்டும்.



(படம் = 3)

விஞவிடைகள் இதைப்பற்றியவைகள்:—

(கஜம் = 12) குறுக்களவு (விட்டம்) உள்ள துறவுக்கு (கிணற்றுக்கு) சுத்தளவு என்ன, விஸ்தீர்ண மென்கிற குழி என்ன?

என்றல்:—

தெரிந்த விட்டத்தை (31416)ஆல் பெருக்கி (10000)ஆல் வகு; ஈவே வட்டமாகும். இப்படி வந்த வட்டதை விட்டத்தால் பெருக்கியதை நாலால் (4 ஆல்) வகுத்த ஈவு அந்த வட்டத்துக்குழியாம். (என்றல் வட்ட விஸ்தீர்ண மென்கிற விசாலமாகும்).

அல்லது $(\frac{31416}{10000})$ஐயே விட்டவர்க்கத்தால் பெருக்கி நாலில் வகுத்தாலும் வட்டக்குழி வந்து விடும். இல்லையேல் $(\frac{31416}{10000})$ஐ அறை விட்ட வர்க்கத்தால் பெருக்கினலும் வட்டக்குழி வந்துவிடும். இதற்குச்சமீகாணம்:—

(1). வட்டம் $= \left(\frac{31416}{10000}\right) \times$ (விட்டம்);

(2). வட்டக்குழி $= \frac{1}{4}\left\{\right.$(வட்டம்) (விட்டம்)$\left.\right\}$. அல்லது

வட்டகுழி $= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{31416}{10000}\right)\right.$(விட்டம்)$\left.^2\right\}$ இல்லேயேல்

வட்டகுழி $= \left\{\left(\frac{31416}{10000}\ \pi\right)\right.$(விட்டம்/2 = அரைவிட்டம்)$\left.^2\right\}$

தெரிந்த விட்டம் (12) பனிரண்டை (31416)ல் பெருக்க 376992. இதை (10000)ல் வகுக்க ஈவு $37\frac{6992}{10000}$; இதேதான் 12கஜ விட்டக்கிணற்றின் சுத்தளவாகும்.

∴ விட்டம் = 12க்கு, சுற்று அளவு $= 37\frac{6992}{10000}$, என்பதாம்.

வட்டக்குழிக் கணிக்கும் உதாஹரணம்:—

விட்டம் = (12) கஜம் ஆகையால் இவ்விட்ட வட்டத்தின் குழி என்ன வென்றால்:—

12 விட்டத்தின் சுத்து $37\frac{6992}{10000}$ இதை (ஷ 12ன் கால்பங்கால் ($\frac{12}{4} = 3$)ஆல் பெருக்க) ஷ வட்டம் $37\frac{6992}{10000}$க்குச் சமம் = 37·6992 இதை 3ஆல் பெருக்க (37·6992 × 3) = 113·0976ம் வட்டக்குழியாம்.

இங்கே படம் நாலை (4ஐ)க் கவனி:—

இங்குள்ள வட்டத்தில் (O) என்பது சிறிய பெரிய இருவட்டங்களின் மத்திய கேந்திரம் (மத்தி = ஸென்ட்ரல்).

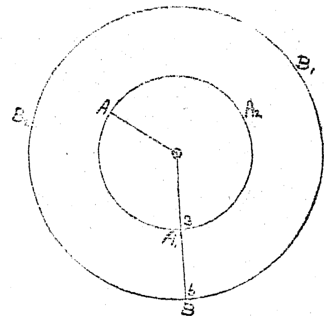
பெரிய அறைவிட்ட = O B = 6.

சிறிய அறைவிட்ட = O A = 3.

என்றுமுதலில் நிச்சயிக்கவும்.

பிறகு:—

(4 × 4) = 16 சதுர (கஜ)க் குழிக்கு வெள்ளை வர்ணம் பூச கூலி (10) ரூபாய், மஞ்சள் வர்ணம் பூசக் கூலி (15) ரூபாய் ஆகையால் படத்தில் கண்ட சிறிய வட்டத்துக் குழிக்கு மாத்திரம் மஞ்சள் பூச்சும், இச்சிறிய வட்டத்துக்குமேல் மிகுதியாயிருக்கும் பெருவட்டகுழிக்கு வெள்ளைப் பூச்சும் பூசத்தரவேண்டிய கூலிகள் எம்மாத்திரம்.



(படம் 4)

என்றால்:—

இதன் விகிதஸாம்யகணிதம்:—

முன் சொன்னபடி சிறிய வட்டத்துக்கும் பெரிய வட்டத்துக்கும் குழி கணித்துப் பெரிதில் சிறிதைக் கழித்த மிச்சமே—(சிறியவட்டக்குழி கழிந்த) பெறிய வட்டக்குழியாகும். என்பது பொதுவாகத் தெரிந்துவிடும்.

சிறியவட்டக்குழியின் சம்பந்தமில்லாமலே, சிறிய பெரிய அரை விட்டங்களைக்கொண்டே பெறிய வட்டச் சொச்சக்குழியைக் கணிக்கும் வழி:—

படம் 2 ஐப்பார் = ($A; A_1; A_2 \odot$) = சிறுவட்டம்; ($B; B_1; B_2 \odot$)= பெருவட்டம்.

∵ {(பெருவட்டக்குழியில் சிறுவட்டக்குழி கழிந்த சொச்சப் பெறுவட்டக்குழிக்கு)}

$$= \left\{(\odot\ B, B_1, B_2)^2 - (\odot\ A. A_1; A_2{}^2)\right\},$$

பெரிய அறை விட்டவர்க்கத்தில், சிறிய அறை விட்டவர்க்கத்தைக் கழித்த மிச்சத்தால் ($\frac{31416}{10000}$ = π) = 3·1416.ஐப் பெருக்குவதே பெரு வட்டச் சிறுவட்டக்குழிகட்குறிய அந்தர (வித்யாஸ)க் குழியாம்.

இல்லையேல்:—

பெரு அறைவிட்டத்தில் சிறு அறைவிட்டத்தைக் கூட்டுந் துகை; பெரு அறை விட்டத்திற்சிறு அறை விட்டத்தைக் கழித்ததுகை, (π) ஆ இம் மூன்று துகையையும் ஒன்றுக் கொன்று பெருக்கியதும் (முன் போல) இருவிட்ட வட்டக்குழிகளின் அந்தர (வித்யாஸ)க் குழியாம்.

குறிப்பு:— பெரு அறைவிட்டம் = (பெ. அ. வி)

சிறு அறைவிட்டம் = (சி அ.வி) ∴

{(பெருவட்டக்குழிக்கும் சிறுவட்டக்குழிக்கும் உள்ள அந்தர (வித்யாஸ)க் குழி)} = {(பெ. அ. வி)^2 —(சி அ. வி)^2} × π

= (பெ. அ. வி + சி. அ. வி) (பெ. அ. வி—சி. அ. வி) π.

என்று இவ்விரு வழியிலும் விடை வருவது சமமேயாகும்.

இதற்கு இங்கு பெரு விட்டம்= 12 கஜம். இதன் வட்டக் குழிக்கணிக்க $\pi \times (\frac{12}{2})^2 = 3{\cdot}1416 \times 6 \times 6.$

$= 3{\cdot}1416 \times 36.$

$= 113{\cdot}0976 =$ பெருவட்டகுழி.

$\pi \times (\frac{6}{2})_2 = 3{\cdot}1416 \times 3 \times 3)^2$

$=3{\cdot}1416 \times 9.$

$= 28{\cdot}2744 =$ சிறு வட்டக்குழி.—

$(113{\cdot}0976 — 28.2744) = 84{\cdot}8232 =$ இருவட்டக்குழி யந்தரம்.

இதைத்தான் சிறுவட்டக் குழிக்கு (குழியால்) மிச்சமான பெருவட்டக் குழி என்று சொல்வது வழக்கம்.—

வட்டக்கூலி விசேஷக்கணக்கிங்கு:—

—8 கஜம் குறுக்கில் ஓர்வட்டக்கிணர் ஏற்கனவேயுள்ளது; இதையே சொந்தக்காரனுக்கு -14-கஜம் அகலத்தில் உள்ள வட்டக்கிணறுக்க வேண்டு மென்று தோன்றியது. இவன் ஏவலால் கூலிக்காரர்கள்:—தோண்டக்கூலி— முதல்மட்டிக்கு ஓர் சதுர கனக்கஜக்குழிக்கு -கால் ரூபாயும்; மட்டு 2ல் $\frac{1}{2}$; மட்டு 3ல் 1, மட்டு 4ல், 2; மட்டு 5ல் 3, மட்டு 6ல் 4, மட்டு 7ல் 5 ரூபாய்கள் விதம் கூலி கேட்டனர். ஆகையால் தோண்டிய ஆட்களுக்குச் சேர வேண்டிய மொத்தக் கூலி ரூபாய்கள் எவ்வளவு என்னில்:—

(**87**ம் **88**ம்) பக்கத்தில் காட்டிய விவரப்படிக்கு:—

குறிப்பு.—

பெரு அரைவிட்டம் = (பெ. அ. வி) = A

சிறு அறைவிட்டம் = (சி, அ. வி) = B

(ஒரே மத்திமகேந்திர (ஸண்ட்ரல்) முள்ள இஷ்டமான இருவட்ட வித்யாஸக் குழி) = π (பெ. அ. வி + சி. அ வி) (பெ. அ. வி—சி. அ. வி) =(A+B) (A—B) (3.1416).

$\therefore$ இங்கு:- 2A=14, 2B=8 $\therefore$ A=7, B=4.

$\therefore$ (A+B) (A—B) = 11 × 3 = 33 [$\therefore$]

(ஓர் மட்டுக்குறிய இருவட்ட வித்யாஸ (சொச்ச) கனகஜக்குழிக்கு) } = (33 × 3·1 4 1 6) = 103·6728. என்று ஏற்பட்டது, இதற்குக்

கூலி ரூபாய் கணிக்கும் விவரணம்:—

(மட்டு 1	ரு	கூலிரூபாய் $\frac{1}{4}$	$\therefore$)	கூலி	=	103.6728	×	$\frac{1}{4}$	=	25·9182
(மட்டு 2	ரு	கூலிரூபாய் $\frac{1}{2}$	$\therefore$)	ஷை	=	103.6728	×	$\frac{1}{2}$	=	51·8364
(ஷை 3	ரு	ஷை 1	$\therefore$)	ஷை	=	103.6728	×	1	=	103·6728
(ஷை 4	ரு	ஷை 2	$\therefore$)	ஷை	=	103.6728	×	2	=	207·3456
(ஷை 5	ரு	ஷை 3	$\therefore$)	ஷை	=	103.6728	×	3	=	311·0184
(ஷை 6	ரு	ஷை 4	$\therefore$)	ஷை	=	103.6728	×	4	=	414·6912
(ஷை 7	ரு	ஷை 5	$\therefore$)	ஷை	=	103.6728	×	5	=	518·3640

ஆகமொத்தம் [=($15\frac{3}{4}$.)] குக் ரூபாய்களின் = 1632·8466-ரு

இங்குவிடை = 1632·8466. ரூபாய்கள் கூலியாம்:—

இல்லையேல்:—

ஷை மட்டுக் கூலி விகிதம் 7ம் கூட்டிய = ($\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+3+4+5$) = $15\frac{3}{4}=\frac{63}{4}$ இதை மட்டுக்குழியாகிய (103·6728)ஆல் பெருக்கினாலும் கூலிரூபாய்களின் ($103.6728\times\frac{63}{4}$ = 1632·8466) என்று வந்துவிடும், இது சுலபவழி.

கூலி கொடுக்கவேண்டிய ரூபாய் = 1632.0000

அணுக்கள் = $(.8466 \times 16) = 13{\cdot}5456.$

தம்பிடிகள் = $(.5456 \times 12) = 6{\cdot}5472.$

ஆ { ரூபாய் = 1632; அணு = 13; பை = 6·55 }

கூலி ரூபாய்களின் = 1632-13-7 என்பதுதான் இங்கு விசேஷம்.

பெரு அறை விட்டம் = (பெ. அ. வி.) = 6; இதன் வர்க்க = 36

சிறு அறை விட்டம் = (சி. அ. வி.) = 3; இதன் வர்க்க = 9

ஷை இருவர்க்க வித்யாசமிதன் = 27

ஷை $3{\cdot}1416 \times 27 = 84{\cdot}8232$ = இருவட்டகுழி(வித்யாஸம்). யந்தரம்.

அல்லது.

$\{$(பெ. அ. வி.) + (சி. அ. வி.)$\}$ $\{$(பெ. அ. வி.) − (சி. அ. வி.)$\}$ π

$= (3{\cdot}1416)\ (6 + 3)\ (6 - 3).$

$= 3{\cdot}1416 \times 9 \times 3.$

$= 3{\cdot}1416 \times 27 = 84{\cdot}8232.$

= இருவட்டக் குழியந்தரம்.

இம்மூன்று விதவழியிலும் வந்த விடைகள் சமமே.

ஆகையால் இஷ்டமான வழியில் கணித்துக் கொள்க—.

இனி பூச்சுக் கூலி கணிக்க:—

சிறு வட்டக்குழி (மேலேகணித்தது) = 28·2744

சிறு வட்டக்குழி போனபெரு வட்டகுழி = 84·8232

ஷை ரண்டுங் கூட்ட—12—விட்ட வட்டக்குழி = 113·0976

சதுரகஜம்-16க்கு மஞ்சள் பூசக் கூலி = 15, வெள்ளை பூசக்கூலி = 10 ஆகையால் சிறுவட்டக்குழி = 28.2744 ரூ மஞ்சள் பூச

$$\frac{28.2744 \times 15}{16} = (424{\cdot}116 \div 16).$$

= 26·5072 ரூபாய் (மஞ்சள் பூசக்கூலி).

$$\frac{84{\cdot}8232 \times 10}{16} = \frac{848{\cdot}232}{16} = 53{\cdot}0145$$ சொச்சப்பெரு வட்டக் குழிக்கு

வெள்ளை வர்ணம் பூசக்கூலி ரூபாய் = 53·0145

1653/2.

ஆ பொத்தக்கூலி = (53·0145 + 26·507).

= { ரூ. அ. பை. 89 — 8 — 4·22 } என்பது.

மற்றும் வருவனவெல்லாமிப்படிக்குக் கண்டு கொள்ளவும்.—

வட்டக் குழிக்குரிய அறை விட்டக் கைவாரத்தால் (கம்பாஸால்) சுற்றிலும் நெருக்கடியாகத் தொடர்ச்சியுள்ள வட்டங்கள் வரைந்தால் (செய்தால்) முடிவில் இது பந்து முதலிய குண்டு உருவம் போன்ற கன (பரிமாணமுள்ள) மண்டலங்கள் (கன வட்டங்கள்) ஆகும். இவ்வித உருவமுடைய கனவட்டங்களுக்குத்தான் கோலம் என்கிற பெயர் என்று முக்யமாக இங்கு கவனிக்க வேண்டியது.

கோல மேற்பரப்புக்குழி (கோல கனக்குழி - முதலிய) கணிக்க:—

வட்டக்குழியை நாலில் பெருக்கக் கோல மேற்பரப்புக்குழியாகும். அல்லது அறைவிட்ட வர்க்கத்தால் (π) பையைப் பெருக்கினதை நாலி (4) ல் பெருக்கினாலும் கோல மேற்பரப்புக்குழி வந்துவிடும்.

கோலமேற்பரப்புக்குழியை விட்டத்தால் பெருக்கியதை ஆறில் வகுத்த ஈவு கோலமத்யகேந்திர (கர்ப்பகேந்திர)ாதி ஸம்மந்தமாகிற கோல கனக்குழியாம். இல்லையேல், கோல அறைவிட்டக் கனத்தால் π (பை) பையைப் பெருக்கியதை நாலில் பெருக்கி மூன்றில் வகுத்த ஈவும் கோல கனக் குழியாக வரும்.

ஸமீகரணங்கள்:—அறைவிட்டம் = (அ.வி);

{ (கோலமேற்பரப்புக்குழி) = (கோ.மே.ப.கு) } = { (4 × வட்டக்குழி) }

= { (4π) (அறைவிட்ட)^2 };

{ (கோலகனக்குழிக்கு) } = { (கோ.மே.ப.கு) $\left(\frac{\text{விட்டம்}}{6}\right)$

= { $\frac{4}{3}\pi$ (அ.வி)^3 };

உதாரணம்:—

கஜம் = 6 அறை விட்டமுள்ள கோலத்தின் மேற்பரப்புக்குழியென்ன. கோல கனக்குழியென்ன வென்றால்:—

வட்டக்குழி (6 கஜ அறைவிட்ட வட்டத்துக்கு) = 113·0976 இதை நாலில் (4ல்) பெருக்கியது = 452·3904 மேற்பரப்புக்குழி, அல்லது ஷெ 6ன் வர்க்க = 6 × 6 = 36. இதை 4ல் பெருக்க = 144, இதை (π = 3·1416) ஆல் பெருக்க = 452·3904 = கோல மேற்புக்குழி இவ்வழியிலும் வந்து விட்டது.

கோலகனங்கணிக்க:—

முன்வந்த கோல மேற்பறப்புக்குழி:— 452·3904. இதை இஷ்ட விட்டம் 12ல் பெருக்க = 5428·6848. இதை 6ல் வகுக்க: வந்த ஈவு 904·7808. இல்லையேல் ஷைக்கு இஷ்ட அறை விட்டம் 6 இதன் கனம் = 6 × 6 × 6 = 216. இதை 4ல் பெருக்க 864 = (216 × 4), இதை (π = 3·1416)ல் பெருக்கியது = 2714·3424. இதை 3ல் வகுத்த ஈவு = 904·7808. முன்போலிங்கும் கோல கர்ப்பக்குழியென்கிற, கோல கர்ப்ப கனபலம் வந்துவிட்டது.

(2) சுத்தளவு ஆகிற வட்டம் தெரிந்த விடத்தில் குறுக்காகிய விட்டம் கணிக்க:—

கணித சுலபத்துக்காகப் பெரியோர்களால் நக்ஷத்ர மண்டலத்தை (பகோலத்தை)-21600'-கலைகளாகப் பிறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. (என்பது கற்பனையாலேயே) ஆகையால் இதன் குறுக்க(ளவுக்க)ான விட்டம் அல்லது அறை விட்டம் (என்கிறத்ரிஜ்யா) என்ன அளவென்றால்:—

தெரிந்த வட்டத்தை ஒன்றால் பெருக்கியதை (3·1416 = π) ஆல் வகுத்த ஈவே அவ்வட்டத்தின் விட்டமாகும்.

இதைப் பாதிசெய்ய அறைவிட்டமாகும்.

இல்லையேல் வட்டத்தைப் பதினாயிறத்தால் பெருக்கி 3·1416ல் வகுத்த ஈவும் முன்போல் விட்டம் வரும்.

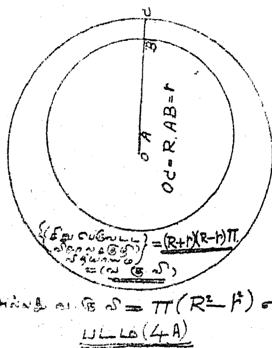
இதை 2ல் வகுக்க ஷைக்கு அறை விட்டமாகிய த்ரிஜ்யாவந்து விடும்.

இதற்கு சமீகாணமிங்கே:—

$$\text{விட்டம்} = \left\{\frac{\text{வட்டம்} \times 1}{(\pi = 3\cdot1416)}\right\} = \left\{\frac{\text{வட்டம்} \times 10000}{31416}\right\}.$$

தெரிந்தவட்டம் = 21600 இதை 1ல் பெருக்க 21600 இதை (3·1416 = π)ல் வகுத்த ஈவு $\left(\frac{31000}{3\cdot1416}\right)$ = 6875·15; அல்லது 21600ஐ (10000)ல் பெருக்க 216000000. இதை 31416-ல் வகுத்த ஈவு 6875 $\frac{15000}{31416}$ என்றாகும்.

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிக் கணித்துக்கொள்ள வேண்டியது.



அல்லது வ. டு வி = π(R²−r²) எனவே

படம் (4 A)

படம் (4 A)க்கு விவரணம்:—

படம் (4 A)ஐக் கவனி:—

OC = பெரிய வட்டத்தின் அரைவிட்டம்,

AB = சிறிய வட்டத்தின் அரை விட்டம் ஆகும்.

குறிப்பு:—

இவ்விருவித வட்ட (ஸெண்ட்ரல்களும்) மத்திமங்களும் ஒன்றாக இருக்கவேண்டும் என்கிற அவசியம் இதைப் போன்ற க்ஷேத்ரங்களுக் கவசியமே கிடையாது. ஆனால் வட்டத்துள்ளே சிறுவட்டம் எப்படியாவது இருக்கவேண்டியது தான் ஒன்று.

[இங்கே சொன்ன விதியை படம் (4B)க்கும் (4C)க்கும் கொள்ள வேண்டியது அவசியம்]

என்பதை உணர்க :—

(AB) அரைவிட்ட வட்டக்குழி கழிந்த, (OC) அரைவிட்ட வட்டக்குழி (விசாலம்) எவ்வளவு என்றால் இதைக் கணிக்க :—

$\because$ OC = R; AB = r இங்கிப்படியானால் :—

[(பெருவட்டக்குழி) — (சிறுவட்டக்குழி)]

$= [\odot^2 - \odot^2]$

$= (\pi \times R^2 - \pi r^2)$

$= \pi (R^2 - r^2)$

$= \pi (R + r) (R - r)$

என்பதாயுணர்க.

படம் (4B) க்கு விவரணம்:—

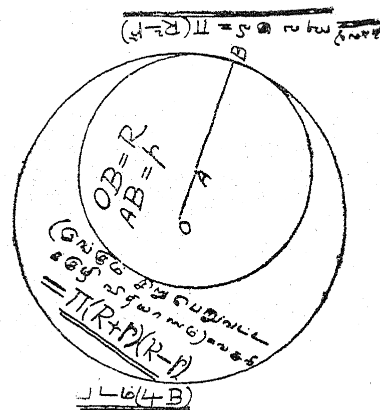
படம் (4 B)ஐக் கவனி:—

இதிலும்:—

OB = பெருவட்டத் துரிய அரை விட்டம் = R.

AB = சிறுவட்டத் துரிய அரை விட்டம் = P;

இங்கே பெரு சிறு வட்ட ஓரங்கள் (B) என்றஸ்தானத்திலே சேருகின்றன. இன்னும் இது போல் பல விதங்களாக அமையத்தகும்.



ஆகையால்:—

(இங்கும் பெருவட்டச் சிறு வட்டக் குழி களின் வித்தியாசத்துக்குச்)

$= \pi [(OB)^2 - (BA)^2]$

$= \pi [(OB+BA)(OB-BA)]$

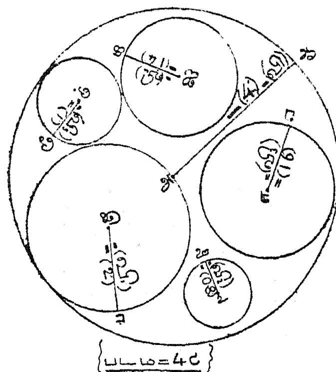
$= \pi (R+P)(R-P)$

மற்றவை படம் 4Aற் ச்சொன்னபடிக்காகும்:

படம் (4C)ஐக்கவனிக்கத்தம் இஷ்டம் போல்சந்தேகங்கள் யாவும் அற க்ஷேத்ரங்களைச்சாதனம் நன்கு செய்யலாம்:—

மற்றும் வருவன வெல்லாம் இவைகள் போலக் கொள்ளலாம்.

படம் (4C)க்கு விவரணமிங்கு காண்க:—



{படம்=4C}

படம் (4 C)ஐக் கவனி:—

பெரியதாகிய (வி) அரை விட்ட வட்டவிசாலத்தில், மற்றய சிறியவைகளாகிய ($வி_1$, $வி_2$, $வி_3$, $வி_4$, $வி_5$) அரை விட்ட வட்டங்களின் விசாலங்கள் கழிந்த மிச்ச(ப் பெருவட்டக்)குழி என்ன வென்றால்:—

இதற்குச் சில விவரணமிங்கு;

அரைவிட்ட = (வி):—

∴ விட்ட = 2 வி என்றாகும்.

பெருவட்ட அரைவிட்ட = வி = 4′ = (அ ஆ).

மற்றய சிறுவட்ட அரைவிட்டங்களினுடைய.

(இ ஈ) = ($வி_1$) = (2′)
(உ ஊ) = ($வி_2$) = (0·8′)
(எ ஏ) = ($வி_3$) = (1·6′)
(ஐ க) = ($வி_4$) = (1·4′)
(ஒ ஓ) = ($வி_5$) = (1′)
} என்பவைகளாகும்:—

இவ்வித க்ஷேத்ரங்கடக்கு மிச்ச வட்டக்குழிகணிக்கப் பொது விதி:—

சிறு அரைவிட்டங்களின் வர்க்கக் கூட்டலை பெறு அரைவிட்ட வர்க்கத்தில் கழித்த மிச்சத்தால் ($\pi = 3{\cdot}1416$)ஐப் பெருக்கியதே சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த மிச்சமாகிய பெருவட்டக் குழியாகும்—.

இதற்கு விளக்கம்:—

இங்கு அரைவிட்ட = (R = r = வி) ஆகையால். பொதுவாய்

வட்ட விசாலக்குழி $= \pi\,(R = r)^2 = \pi\,வி^2$ ∵

∴ (இங்கு சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த மிச்சமாகிய பெருவட்டக்குழி)

$$= \left\{ (\pi வி^2) - (வி_1^2 \pi) - (வி_2^2 \pi) - (வி_3^2 \pi) - (வி_4^2 \pi) - (வி_5^2 \pi) \right\}.$$

$$= (வி^2 \pi) - \pi\,(வி_1^2 + வி_2^2 + வி_3^2 + வி_4^2 + வி_5^2)\ ∵$$

$\therefore$ ஷை ரு = (π) (வி^{2} − வி$_1^2$ − வி$_2^2$ − வி$_3^2$ − வி$_4^2$ − வி$_5^2$ என்பதால் (மேற் கூறிய பொது விதிப் பிறப்பாம்.)

(இதற்குச் சமம்) = π $\{$(வி^{2}) − (வி$_1^2$ + வி$_2^2$ + வி$_3^2$ + வி$_4^2$ + வி$_5^2$) $\}$.) என்றாயிற்று.

ஷைக்கு உதாரணமிங்கு காண்க—

வி^{2} $= 4^2$ ரு $= 16$ இதில்

$$\left\{\begin{array}{l} \text{வி}_1^2 = (2)^2 = 4 \\ \text{வி}_2^2 = (0{\cdot}8)^2 = 0{\cdot}64 \\ \text{வி}_3^2 = (1{\cdot}6)^2 = 2{\cdot}56 \\ \text{வி}_4^2 = (1{\cdot}4)^2 = 1{\cdot}96 \\ \text{வி}_5^2 = (1)^2 = 1{\cdot}00 \end{array}\right.$$

(ஷை மொத்த வர்க்கக் கூடலின்) $= 10{\cdot}16$ இதை

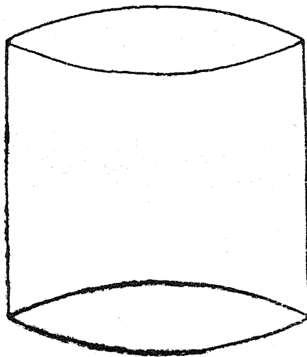
கழித்தசேஷம் $(16 - 10{\cdot}16) = \mathbf{5{\cdot}84}$.

இந்த 5·84 ஆல் $(\pi = 3{\cdot}1416)$ஐப் பெருக்கியதற்கு (ச் சமம்) $= (3{\cdot}1416 \times 5{\cdot}84) = \mathbf{18{\cdot}346944}$. என்றாம்.

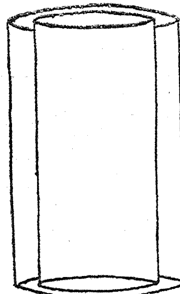
ஆதலால் ஷை 4 அறைவிட்டமுள்ள பெருவட்டக் குழியில், முறையே அறை விட்டங்கள் (2, 0·8, 1·6, 1·4, 1) உள்ள சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த மிச்சக் குழிக்குச் சரி = ஷை **18·346944** என்று சொல்வது.

மற்றும் இதற்கு மேலும் வருவனவெல்லாமிப்படியே பார்த்துக் கொள்க.

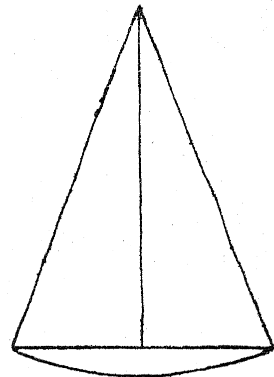
$(\pi =$ பை)யைச் சம்பந்தித்ததும் பார்க்கக் கூடியவைகளு மாகிய சில விசேஷ க்ஷேத்ரங்கள் இங்கே காணவேண்டியது—.



(படம் = 5)



(படம் - 6)



(படம் - 7)

மரக்கால், படி, நாழி, முதலிய முகத்தலளவைக் கருவிகளும்; ஒழுங்குபெற ரூபாய், அறை ரூபாய், கால் ரூபாய், காலணு, தம்பிடி முதலிய நாணயங்களை ஒன்றன்மேல் ஒன்றாயடுக்கிக் காணப்படும் உருவும் படம் (ஐந்தை) (5ஐ) அனுசரித்திருக்கும்.

குழாய் முதலியன படம் (6)ன் உருவையனுசரித்திருக்கும்:—

கிரீடம்; கூறுப் (கூருருளையாய்) வரும்படி பருப்பு சர்க்கரை முதலியவைகளை கடிதாசியில் கட்டிய உருவம் முதலிய (படம் 7)ஐ அனுசரித்திருக்கும்.

இவ்வித உருவங்களைப்பற்றிய கணிதவிதம்.

ஒழுங்கான உருளையின் கனபரிமாணங் கணிக்க:—

உருளை, வட்ட ஓரங்களுள்ள பட்டையான வடிவமென்று நமக்குத் தெரியும் ஆகையால் இதன் கனபரிமாணத்தை (கனக்குழியை)க் கணக்கிட நாம் அடிப்பாகத்தின் பறப்பை (அடிபாகக் குழியை) உயறத்தால் பெருக்கவேண்டும். ஆகையால்

வட்டபாகத்தின் அறைவிட்டம் = (R) என்றும்.—

உருளையினுயரம் = (H) என்றும் ஏற்படுத்திக் கொண்டால்:—

இதன் கனபரிமாணத்தை நாம்:—

$(V) = \pi R^2 H$. என்கிற சூத்ரத்தால் கணிக்கலாகும்.

ஆகையால்:—

$$\left\{\begin{matrix}\text{ஒழுங்கான உருளை}\\ \text{யின் கனக்குழி}\\ = (\text{கனபரிமாண}).\end{matrix}\right\} = (\text{ஒ. உ. க. கு}) = V = (\pi R^2 H); \;.\;.\;.\; (1)$$

ஒழுங்கான உருளையின் தலப்பரப்பு என்கிற மேற்பரப்புக்குழி (உருளை தலக்குழி) கணிக்க:—

ஒழுங்கான - உருளைத் - தலக் - குழி = ஒ. உ. த. கு

$\therefore$ (ஒ. உ. த. கு) = $(2 \pi RH)$. என்றாகும் —

கனவடிவ உருளை ஒன்றுக்கு இதனுடன் கூட மேல்பக்கமும் அடிபக்கமும் உண்டு. இரண்டு ஓரத்தலங்களும் சமம்.

இவைகளின் மொத்தப்பரப்பு $=(2 \pi R^2)$ ஆகையால்.

(ஒரு உருளையின் மொத்தத் தலப்பரப்பு)

$= (2\pi RH + 2 \pi R^2)$ அல்லது இதன்

$= 2 \pi R (H + R)$. என்றுமாகும்:—

உருளை போன்ற குழாய் உருக்கள் கணிக்க:—

(படம் 6ல்) காட்டியவாறு கனஉருளைவடிவ மொன்றை யெண்ணிப்பார். இதிலிருந்து அதே உயரமும், ஆனால் அதைவிடக் குறைவான அறை விட்டமுள்ள வேறோர் உருளையை, வெட்டியெடுக்கப்பட்டதாகக் கருதுவோம். இப்படி வெட்டியெடுத்தபிறகு குழாய் ஒன்று ஏற்படுகிறது (காணப்படுகின்றது).

இவ் வடிவத்துக்கே குழாயுருளை என்ற பெயர்.

இதனால் தெரிவது யாதெனில்:—

ஒரு குழாயுருளையின் கனபரிமாணம் வெவ்வேறு அறை விட்டங்களுள்ள இரண்டு கன உருளைகளின் கனபரிமாணங்களின் வித்யாசமே.

இரண்டு உருளைகளின் அறை விட்டங்கள் R; r என்றும், உயரம் H என்றும், $R>r$ என்றும் கொண்டால்:—

(குழாயுருளையின் கனபரிமாணம்)

$$= \text{(குழாயுருளை கனக்குழி)}$$
$$= (\pi R^2 H - \pi r^2 H)$$
$$= \pi H (R^2 - r^2)$$
$$= \pi H (R + r) (R - r).$$

என்றாகும்.

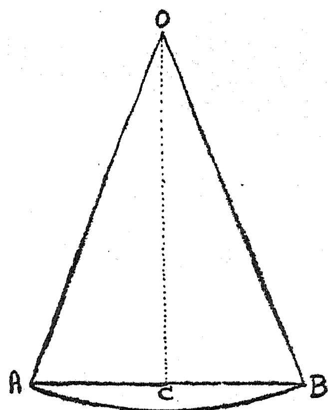
இதனுடைய மொத்தத்தலப்பரப்பு, ஒன்று வெளிப்பரப்பினாலும்: மற்றொன்று உருளையின் உட்பரப்பினாலும் ஆகியது ஆகையால்.

இதன் தலப்பரப்பு = (குழா யுருளை தலப்பறப்பு) என்று கொண்டால்.

$$\text{(குழாயுருளை தலப்பறப்பின்)} = (2 \pi R H + 2 \pi r H)$$
$$= H\, 2 \pi (R + r).$$

இப்பரப்பில் நாம் மேல்பாகம் அடிபாகம் இவைகளின் பறப்பை கணக்கிலெடுத்துக்கொள்ளவில்லை யென்பது கவனிக்குக:—

படம் 8ஐக் கவனி. இது ஒழுங்கான வட்டக்கூருருளை க்ஷேத்ரமாகும்.—



(படம் = 8)

இப்பக்கத்தில் காட்டிய படத்துக்குறிய விவரணம்:—

மணற்குவியலின் ஒழுங்கு, தானியக்கும்பல், இதற்கென்றே செய்யப்பட்ட ஒழுங்கானபுனல் இவைகளெல்லாம் இந்த ($\triangle AOB$) க்ஷேத்ரம்போன்றவைகளே: இந்தவித உருவைத்தான் கூருருளை (கூர் + உருளை) வடிவமென்றழைக்கப்படுகிறது.

(OC) என்ற அச்சின்மூலமாக வெட்டப்பட்ட கூருருளையின் ஒரு பகுதியை பக்கத்தில் காட்டிய (8ம்) படம் தெரிவிக்கின்றது. OA; OB;- இவைகளை நாம் கூருருளையின் சாயந்த பக்கங்கள் என்று கூறுகிரோம். ($\angle AOB$) என்பது கூருருளையின் உச்சிக் கோணமாம்.

கனவடிவக் கூருருளைக்குத் தலங்கள் இரண்டுண்டு:—

(*a*) வட்டவடிவான அடிபாகம்.

(*b*) சாய்வு தலம்.

CO = செங்குத்து உயறம். AO = BO = சாய்வு உயரங்கள்.

செங்குத்து உயறத்தை h ஆலும், சாய்வு உயறத்தை L ஆலுங் குறிப்பது வழக்கம்.

கூருருளையின் கனபரிமாணம்: = (கூருருளைக்கனக்குழி)

(i) குழிவான உருளையொன்றையும், குழிவான கூருருளையொன்றையம், எடுத்துக்கொள். இவைகளின் அடிப்பக்கங்களும், உயரங்களும் ஒன்றுக் கொன்று சமமாயிருத்தலவசியம். கூருருளையை மணலாலாவது, நீராலாவது நிரப்பி; உருளை வடிவத்திற்குள் ஊற்று, இவ்விதம் மூன்று முறை செய்தால் உருளை முழுவதும் நிரம்புவதை நாம் காணலாம்.

(ii) கனவடிவமுள்ள உருளையொன்றையும், கூருருளையொன்றையும், எடுத்துக்கொள். இவைகளின் அடிப்பக்கங்களும், உயரங்களும் ஸர்வஸமமாயிருத்தலவசியம். இவைகள் ஒரே பொருளாலும் செய்யப்பட்டிருக்கவேண்டும். இரண்டையுந் நிறுத்துப்பார். இவற்றிலிருந்து கூருருளையின்னிறை உருளையின் னிறையில் $\frac{1}{3}$ (மூன்றிலொன்று) என்று நமக்குத் தெரியவரும்.

(iii) தண்ணீர் கொஞ்சமுள்ள இரண்டு அளவு பாத்திரங்களை எடுத்துக் கொள். இவைகளுக்குள் முழுகக் கூடிய ஒரே அடிபக்கமும், உயரமுமுள்ள உருளை யொன்றையும்; கூருருளை யொன்றையும், இவ்விரண்டையும் பாத்திரங் களில் போடு. தண்ணீர் மட்டங்களின் அதிகத்தைக் கவனி.

இச்சோதனைகளிலிருந்து நமக்குத் தெரிவது யாதெனில்:—

கூருருளையின் கனபரிமாணம், ஸம அடித்தலமும்-சம உயரமும்-கொண்ட உருளை யொன்றின் கனபரிமாணத்தில் மூன்றிலொரு ($\frac{1}{3}$). பாகம்

உருளையின் கனபரிமாணம் $= (\pi r^2 H) = \pi r^2 h$.

ஆகையால்

கூருருளையின் கனபரிமானம் $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$. என்றும்.

கூருருளையின் தலம்:— என்றால்: கூருருளை மேற்பரப்பு:—

(i) கூருருளையின் தலம் ஒரு வட்டத்தின் விருத்த கோணும் சமாகும். சாய்வு உயரம் L என்றும், அடிப்பாகத்தின் அறை விட்டம் r என்று மெடுத்துக்கொள்.

(சாய்வுத் தலத்தின் பரப்பு = விருத்த கோணும்சத்தின் பரப்பு) அதாவது.

(வில்லின்னீளத்திலறைபாகம் × விருத்தி கோணும்ச அறைவிட்டம்)

$\therefore$ ஷை $= \frac{1}{2} \times 2 \pi r \times L = \pi r L$.

கூருருளைப் படம். (AOBC)ஐக் கவனி:

இதில் $\angle$(OCB = OCA) ஒரு நேர்க்கோண முக்கோணமாகையால்

$(OB)^2 = (OC)^2 + (CB)^2$

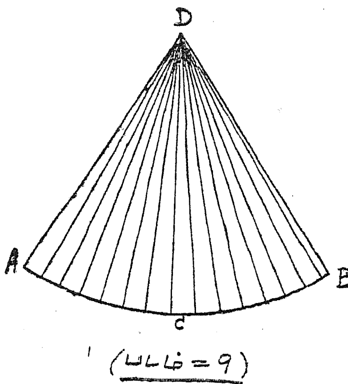
அதாவது $L^2 = h^2 + r^2$. ஆகையால்.

வளைவுத்தலத்தின் பரப்பு

$$= \left\{ \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi r \, (h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

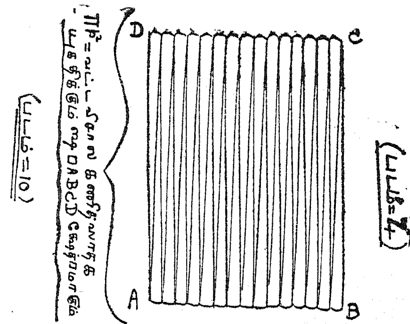
(அடிபாகத்தின் பரப்பையும் இத்துடன் கூட்டினால் கூருருளையின் மொத்தப் பரப்பு) $= \pi r L + \pi r^2 = \pi r (L + r)$ அல்லது இதனின் $= \pi r (r + \sqrt{h^2 + r^2})$.

குறிப்பு:— உயரமென்பது எப்பொழுதும் செங்குத்துயறத்தையேதான் குறிக்கும்:—



(படம் = 9)

அ



(ii) மேலே காட்டிய (9 - 10 ஆகிய) இருபடத்தையுககவனி:— ஆ

கூருருளையின் வளைவு பக்கம் அநேக சிறிய முக்கோணங்களால் ஆனவை என்று கருதிப்பார். [படம் (அ) வைப்பார்] படம் (ஆ) வாக அமைக்கப் பட்டாற்போல் இம்முக் கோணங்களை அமைத்ததாகக் கருதுவோம் முக். கோணங்கள் சிறியதாகச், சிறியதாக இவைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகும். முக்கோணங்களின் பரப்புகளின் மொத்தம் = (ABCD▭) என்ற நீண்ட சதுறப் பறப்பினுடைதற்குச் சமம் = (AB × BC.) இங்கே AB = கூருருளையின் அடிப்பாகத்தின் சுற்றளவிற் பாதி. BC = கூருருளையின் சாய்வு (L) உயறம் ஆகையால்:—

(கூருருளையின் வளைவு தலப்பறப்பு) = $[(\pi r L) = (\frac{1}{2} \times 2\pi r \times L)]$
(மொத்த தலப்பறப்பு) = $(\pi r L + \pi r^2) = [\pi r (L + r)]$ என்பதாம்.

இதுபோல் வந்த க்ஷேத்திரங்களை மேல் சூத்திர உதவியால் கணித்துக் கொள்ள வேண்டியதாகும்.

இக்கூருருளைச் சம்பந்தமான கணக்குக்கு உதாரணம்:—

ஓர் நெல் (தானியம்) அம்பாரம் ஒழுங்கான கூருருளை வடிவத்தில் குவிந் திருக்கிறது. இதன் நுனிக்கும் (உச்சிக்கும்) அடிக்கும் உறிய (L) என்கிற சாய்வான உயறம் = 13 அடி. இதன் சுத்தளவோ சுமார் = 31.42; ஆகை யால் இவ்வம்பாரத்தின் மொத்தக் கனக்குழியடி என்ன, $1\frac{1}{2}$ அடி உயரம் $1\frac{1}{4}$ அகலம் மரக்கால் எத்தனை மரக்கால் இருக்கும்: கலம் முதலிய அளவில் இவ்வம்பார அடிக்குறுக்களவும் செங்குத்துயரமும் என்னென்ன இருக்கும்.

என்றால்:—

$\frac{31.42}{(\pi = 3.1416)}$ = 10 அடி குறுக்களவாகும் கீழே அம்பார அகலம்: (1).

ஷை 10ன் பாதியின் கீழ் அரைவிட்டம் = 5. அடியாகும்; (2).

ஷை அம்பாரச் செங்குத்துயர அடி = $(13^2 - 5^2)$
$= 169 - 25 = 144 = 12^2$,

ஆகையால்

அம்பாரச் செங்குத்துயரம் = 12 அடி ...(3)

அம்பாரத்தினடிக்குழியின் = $(3.1416 \times 5 \times 5)$ = 78·54 அடி. ...(4)

{வளைவுத் தலமென்னும் கூருருளையின் மேல் தலப் பறப்பு (மேற்பரப்புக்குழி) (இதில் கீழ்தலப்பறப்புச் சேரவில்லை)} = {= $(\pi r L)$ = $(5 \times 3.1416 \times 13)$ = $(15·708 \times 13)$ = $(65 \times 3·1416)$ = (204·204); அடி} (5)

{[(மேல்தலப்பரப்பு + கீழ்தலப்பு) = (ஆகவே மொத்தத் தலப்பரப்பினுடைய அடி)]} = (204·204 + 78·54)ரு = (282·744) .. (6)

{(கூருருளைக் கனபரிமாண மாகிய; இவ்வம்பாரக் கனக்குழியடிகளுக்குச் சமம்)} = $(\frac{1}{3} \pi r^2 h)$ ∴ இதற்கு = 26·18 × 12 = (314·16) ...(7)

மரக்கால் உயரம் = $1\frac{1}{2}$ அடி. அகலம் $1\frac{1}{4}$ அடி. எப்போதும் மரக்கால் வட்டரூபமாகவே யிருப்பதால்:- இதன் விட்டம் = $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ ∴ $\frac{1}{2}$ விட்டம் = $\frac{5}{8}$ = $(\frac{5}{4} \times \frac{1}{2})$ ∴ இதன்குழி = $3·1416 \times \frac{25}{64}$ = $.0490875 \times 25$ = 1·2271875 = (இதே ஷை மரக்காலின் குழி)

∴ ஷை மரக்கால் கனக்குழியின் = 1·2271875 × (1 1/2 = 3/2 = 1·84078125

$$\therefore \left(\frac{\text{அம்பாரக் கனக்குழியடி} = 314·16000000}{\text{மரக்கால் கனக்குழி அடி} = 1.84078125}\right)$$

$$= \left(\frac{314·160}{1.841}\right) = (170·646) \text{ மரக்கால்.}$$

ஷை (1·841) கன அடி மரக்காலால் (314·160) கன அடியம்பாரம்; ஆகும் நெல் மரக்காலின் = (170·646) என்றுமிதன் = 171.

இம்மரக்கால்களின் சலம் = [$\frac{171}{12}$ = 14ள. 3ம. (அதாவது பதினாலு கலனே முக்குறுணி) = $14\frac{1}{4}$ள] என்பது.

மற்றும் வந்தனவெல்லாமிப்படிப் பார்த்துக்கொள்ளவும்.

ஒழுங்கான வட்ட உருளை என்பது கீழே சொன்ன மரக்கால் உயரம் $(1\frac{1}{2} = \frac{3}{2})$ அடி இதன் குறுக்கு விட்ட மென்கிற வகல அடி $(1\frac{1}{4} = \frac{5}{4})$ இதற்கு மேலே மரக்காலுக்குக் காட்டிய மொத்த கன அடி கணித உதாரணமே தான் ஒழுங்கான வட்ட உருளைக்காகும்.

மற்ற இதன் விசாலம் முதலிய கணிப்பவை சுலபமே யாகையால் உதகரிக்காமல் விடப் பட்டதாம் என்பது.—

(படம் 11) இதற்குறிய சில விவரத்துச்குறிய குறிப்புகள்:—

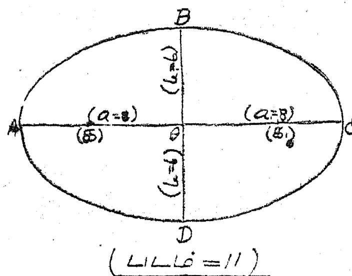
இந்நீள் வட்டச் சம்பந்த மான (θ = கர்ப்ப கேந்திரம்) அல்லது மத்ய கேந்திரம், இக்கேந்திர பிந்துதைவ முக்யஸ்தான மாய்க் கொண்டு இந் நீண்ட வட்ட மேற்படுவதில்லை. ஆகையால் (க); ($க_1$) என்கிற ஸ்தானங்களில் உள்ள

மண்டல (நீள் வட்ட ஸாதகபிந்துக்கள் [அதாவது இரு கேந்
(நாபி)கள்] ஏற்படு மென்பதாம். இவ்விரு நீள் வட்ட நாபி (க $க_1$)க
எப்போதும் இவ்வட்டத்துள்ளடங்கிய நீண்ட விட்டத்தில் (வியாஸத்
தான் நிற்கும். (1).

வாஸ்தவத்தில் வான வெளியில் சலித்துச் சுற்றும் கிரக வட்ட (வக்ர)ரே
[(a, bக் களின் வித்யாஸ அறை விட்டத்தையுடைய) (⊙ ABCD)] யை
அனுசரித்திருக் கின்றது—சுமாராகப்பார்க்க அந்தக் கிரகங்களின் போக்
குறிய நீள்வட்டரேகை போலத் தோன்றலாகும் a, b ($\frac{1}{2}$ வியாசங்க
அரை விட்டங்களும் சற்றேறக் குறைய (சுமார்ரக) ஒன்றாகவே இருக்
ஆகையால் பூர்விக வானசாஸ்திரிகளால் நீள்வட்டச் சம்பந்தமான கிரக(
பலஸாதனமும் ஸமவட்டத்தை யனுஸரித்தேயுள்ளது.

மற்ற விவரம் பொது விதியில் பார்—(AC = 2a, BD = 2b) இ
பற்பல வித்யாஸமாகலம்.

மேலும் நீண்ட வட்டத்தைப் பற்றிய விஷயம்:—



(படம் =11)

மேலே (படம் 11-ல்)காட்டிய க்ஷேத்ரம் போல் உள்ளவைகட்கு வட்
மத்திய கேந்திரம் (ஸன்ட்ரல்)கள் இரண்டுண்டு. ஆகையால் இதற்குரிய அ
விட்டம் (OB = OD = b, AO = OC = a) அறை விட்டம் மத்ய கேந்
கோணங்கள் தோறும் வேறுபட்டுக் கொண்டே b யிலிருந்து a வறைய
விருத்தியையும் இம்முறையிலேயே குறைவுமடையும். என்பதை முதலி
இவ்வித நிலங்கட்குக் கவனிக்க வேண்டியதவசியம்.

இங்குதெரிந்த அரைவிட்ட வித்யாஸமான a,bக் களைக்கொண்டு நீண்
வட்டமாகிய (⊙ ABCD)யின் நீண்ட வட்டக்கோடு கணிக்க:—

விபரம்:—

இருவித விட்டங்களின் வர்க்கங்களைக் கூட்டிப் பாதி செய்ததை மூலம் செய்
தால் (மூலித்தால்) (2π = 2பை)யைப் பெருக்கியதே நீண்ட வட்டரேகை.

பெரு அரை விட்டம் சிறு அறை விட்டம் π. இம் மூன்று தொகைக
ஒன்றுக் கொன்று பெருக்கியதே நீண்ட வட்டக்குழி என்கிற நீண்ட வட்ட
த்துடைய விசாலமாம்.

இதன் சமீகரணம்:—

$$(\text{நீண்ட வட்டரேகை}) = 2\pi\sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)} \quad \ldots \quad (1$$

$\left\{\begin{matrix}\text{(நீண்ட வட்டக்குழி யவ்லது} \\ \text{நீண்ட வட்ட விசால விஸ்தீர்ணம்)}\end{matrix}\right\} = (\pi \cdot a \cdot b)$ . . . (2).

ஷெக்கு உதாஹரணம் கீழ் காண்க:—

ஷெ கண்ட நீட்ட வட்ட அறை விட்டங்களாகிய $a = 8$, $b = 6$ ஆனல் (⊙ ABCD) என்கிற நீண்ட வட்டரேகை என்ன; ஷெ நீண்ட விட்டக்குழியளவு மென்ன வென்றால்:—

$$\odot\ ABCD = 44{\cdot}42851 = \left\{\begin{array}{l}(2\times 3{\cdot}1416)\sqrt{\left(\frac{8^2+6^2}{2}\right)} \\ =\sqrt{6{\cdot}2832}(32+18) \\ =(6{\cdot}2832)\times\left\{\sqrt{(50)}=(7{\cdot}071)\right\}\end{array}\right.$$

இதற்கு மற்றோர் வழி சுலபத்தில்

ஷெ ⊙ ABCD $= 43{\cdot}9824 = \pi\,(a + b) = 3{\cdot}1416 \times (8+6)$ இது அதை விட ஸ்தூல அளவைத்தான் காட்டும்: அதேவெகு நுட்பவிடை.

$\left\{\begin{matrix}\text{[நீண்ட வட்ட (⊙ ABCDயின்} \\ \text{குழி) (ப்பாப்பு) விசாலம்]}\end{matrix}\right\} = 150{\cdot}7968 = (\pi\ a\ b)\ (31416 \times 8 \times 6).$

என்பதாம்.

மற்றும் வந்தனை வெல்லாமிப்படி பார்த்துக் கொள்ளவும். (புத்தக விஸ்தாபயத்தால் இதோடு இவ்விஷயங்கள் நிறுத்தப்பட்டன).

விருத்தம்:—

ஒருபதினாறினாடே
உத்திடுமிருபதுக்கே—
வரு நிலமென்ன வென்னில்;—
மருவிய ஒன்றுக்கோரா கவும் வளுத்து வீரே—(46)—

என்பது:—

கீள் மேல்—ய்சு (16)க்கு தென் மடல் (உய = 20)ரு (ஒன்றுக் கொன்று நீழ்ச்சியில் விகித விசாலப் பரிமாணம்) யெத்தனை யென்னில்:—

ய்சு (16)யும் (ய $= \frac{1}{16}$)ல் கழிக்க—க (1), உய (20)யும் — ய ($\frac{1}{16}$)ல் களிக்க—கவ ($1\frac{1}{4}$) ஆதலால்:— கவ ($1\frac{1}{4}$)ரு—ப—ஒ—(மா-காணி)என்பது.

யெதுவுமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.—

வெண்பா:—

பாராய்கீள்மேல் பனிரண்டே: தென்மடலே
ஓராமல் நிலமுக்காணியாம் நேராக—
வந்தநில முந்திரியாய் மாருபதினாரினிலே
தொந்தமுரு கைக்கீய்ந்து சரிசொல் = (47)

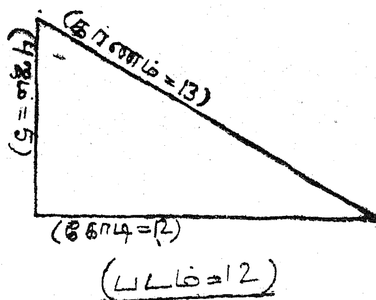
என்பது:—

கீழ்மேல் - யஉ (12) ரு தென் மீ அரியாமல் நிலம் சூ (3/80 = முக்காணி யானல் தென் மீ சொல்லறியு(ம்) வகை—

சூ (முக்காணி) நிலத்தையும் முந்திரிப்படுத்த - ௰உ (12). இதை முந்தி குணி - ௰சு (16). யென்பது - ௰சு (16)ல் மாற - ௱சுஉ (I92 = 12× 1 இதை (தெரிந்த) ஒரு கைக்கோல் - ௰உ (12) ருக்குடுக்க ஈய்வு ௰சு (16) ஆதல தென் மீ (நீளக்கோல்) ௰சு (16) என்பது:...

இவ்விதங் கணிதகர்த்தா- நிலப்பறப்பும் ஓர் பக்க நீளமும் தெரிந்தால் மற்(பக்கங்கணிக்க வழி கூறுகிறார். கீழ்மேல் தென்வடல் இருநீளமுந் தெரிந்தபே அந்நிலம் மனை (விசாலங்கணிக்க) பறப்புக்கணிக்க முன்னே கூறி இருக்கிர இவைகள் மூன்றவயவங்களையுங்கணிக்க; வேறு சில வழிகளும் இருக்கின்ற கூடியவறையில் வெகு சுருக்கமாக அவ்வழிகளை இனி விவரிக்கப் படுகின்றன:—

இவைகள் (க்ஷேத்ரமிதி) ஜ்யாமிதி விகிதங்கள் என்று சொல்லப்படும்:—



(படம் 12)ஐக்கவனி:—

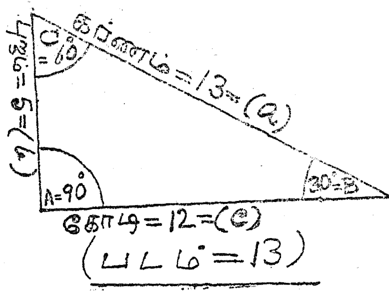
இந்த க்ஷேத்ரத்தில் கர்ணம் = 13, கோடி = 12, புஜம் = 5. அமைந்திருக்கிறது.

இந்த க்ஷேத்ரஸம்பந்தமாக முதலில் கவனிக்க வேண்டியவைகள் சி வருமாறு:—

இவ்வித முக்கோண க்ஷேத்ரத்தில் ஜாத்ய (நேர்க்கோண முக்கோண) த் கோணக்ஷேத்ரமென்றும், அஜாத்ய த்ரிகோண (விஷமத்ரிகோண) விஷம பு கோண க்ஷேத்ரமென்றுமிருவிதம்:—

ஸமத்ரிகோணத்தில் ஏதாவது இருபுஜங்களின் சேர்க்கை ஸ்தானத்தி கோணம் (90°) பாகையாக இருக்கும். இதற்கெதிர் புஜமே கர்ணக்கோடாகு இதைவிட மற்ற இருபுஜங்களும் சிரிதாகவே குறைந்திருக்கும். கோணங்களு அந்தந்த புஜத்துக்கெதிருளவைகள் (90°) பாகைக்குக் குறைந்தே இருக்கு ஆகவே கோணங்களின் பாகையாதிகள் மூன்றும் ஒன்று சேர்க்க மொத்த = (180°) வந்துவிடும்:—

விஷமத்ரிகோணத்தில் எந்த புஜங்களின் சம்பந்தக் கோணங்களும் (90 ஆக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. ஆகையாலதற்கு விஷம (த்ரி)புஜ பு கோணமென்று பெயர் வந்தது. மற்றவையாவும் ஸமகோண முக்கோண துக்குச்சொன்னது போலவேயாகும்:—



இங்கு (180°) க்கு $= (90° + 60° + 30°)$
$\therefore$ C $= 60° = (180° - 90° - 30°)$;
B $= 30° = (180° - 60° - 90°)$
A $= (180° - 60° - 30°) = (180° - 90°) = 90°$;
ஆகையால் (180°) ரு $= [(A + B + C)$ என்றும்

இங்கே கோடி $= c = 12$
ஷை புஜம் $= b = 5$
ஷை கர்ணம் $= a = 13$ $\therefore$

$$a^2 = c^2 + b^2 = (c-b)^2 + 2cb) \quad (1)$$
$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad (2)$$
$$b^2 = a^2 - c^2 = (a+c)(a-c) \quad (3)$$

என்று ஸமத்ரிகோண (ஸாஜாத்யத்ரிகோண) ஸம்பந்தத்தைப்பற்றிய வரையில் சூத்ரங்கள்:—

இதன் வியக்தவிளக்கம்:— ஸாஜாத்யத்ரிகோணத்தில் கர்ணம், புஜம், கோடி என்று மூன்று புஜ (கோட்டு) உருவ (அவயவ)ங்கள், கர்ணஸம்முகமான இரு புஜசந்திப்பு ஸ்தானக்கோணம் ஸதா (90°) பாகமே உள்ளது, மற்ற கோடி ஸம்முககோணம் புஜ கர்ணஸம்பந்த ஸ்தலத்திலும் புஜ ஸம்முககோணம் கோடி கர்ண ஸம்பந்தஸ்தலத்திலுமிருக்கும். இவ்விரண்டுக் கூடல்களும் ஸதா (90°) ஆகவேயுள்ளது. இவ்விதம் கோண உருவ அவயங்களும் மூன்று:—

கர்ணவர்க்கத்தில் கோடிவர்க்கத்தைக் கழித்தால் புஜவர்க்கமும், கர்ண வர்க்கத்தில் புஜவர்க்கத்தைக் கழித்தால் கோடிவர்க்கமும், கோடிவர்க்கத்தோடு புஜவர்க்கம் கூடினால் கர்ணவர்க்கமும் வருமென்பதாம்:— (1)

அல்லது.

கோடியை புஜத்தால் பெருக்கி ரட்டித்தோடு கோடி புஜாந்தரவர்க்கம் கூடினால் கர்ண வர்க்கம் வரும்.

கர்ணத்தில் கோடியைக் கூட்டியதை, கோடியைக் கர்ணத்தில் கழித்ததால் பெருக்க புஜவர்க்கம் வரும்.

கர்ண புஜக்கூடலை; கர்ணபுஜ வித்யாசத்தால் பெருக்கின லித்தகையே கோடிவர்க்கமாகும்:— (2)

இதன்ஸ்மீகரணம்

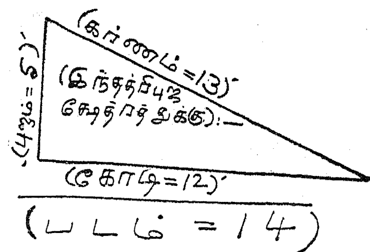
$(\text{கர்ண})^2 = (\text{கோடி})^2 + (\text{புஜ})^2$
$(\text{கோடி})^2 = (\text{கர்ண})^2 - (\text{புஜ})^2$
$(\text{புஜ})^2 = (\text{கர்ண})^2 - (\text{கோடி})^2$ (1)

$$(\text{கர்ண})^2 = \left\{ 2\,(\text{கோடி} \times \text{புஜம்}) + (\text{கோடி} - \text{புஜம்})^2 \right\}.$$

$$(\text{கோடி})^2 = \left\{ (\text{கர்ண} + \text{புஜ})\,(\text{கர்ண} - \text{புஜ}) \right\}.$$

$$(\text{புஜ})^2 = \left\{ (\text{கர்ண} + \text{கோடி})\ (\text{கர்ண} - \text{கோடி}) \right\};$$ (2)

ஷை களுக்கு உதாரணம்;—



(படம் = 14)

பக்கத்தில் காட்டிய படத்தில் கர்ணம் $=13$, கோடி $= 12$ $\therefore$ புஜமென்னவென்றால் $(13^2 - 12^2) = (169-144) = (25) = (5)^2$ ஆகையால் புஜம் $= 5$ ஆம் (1)—

கர்ண $=13$, புஜ $=5$, கோடி $=$? வென்றால்:

$(13^2 - 5^2) = (169-25) = (144) = (12)^2$

$\therefore$ கோடி $= 12$ ஆம் (2)

புஜ $= 5$, கோடி $= 12$; கர்ண $=$? எனில்:—

$5^2 + 12^2 = (25+144) = 169 = (13)^2$

$\therefore$ கர்ண $= 13$. என்பது (3)—

மற்றோர்வழிப்படி இம் 3ம் கணிக்க:—

$(\text{கர்ண})^2 = (13)^2 = 169 = 2 \times 12 \times 5 + (12-5)^2 = (120+49)$

$\therefore$ கர்ண $= 13$. .... (1)

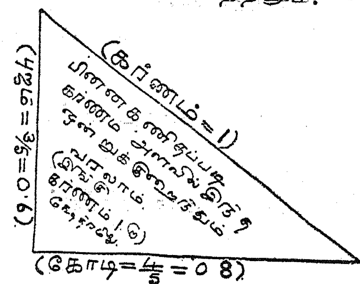
$(\text{கோடி})^2 = (13+5)(13-5) = (18 \times 8) = 144 = (12)^2$

$\therefore$ கோடி $= 12$. (2)

$(\text{புஜ})^2 = (13+12)(13-12)(25 \times 1) = (25 = (5)^2$

$\therefore$ புஜம் $= 5$ ஆகும் (3)—

பின்னத்திலும்:—



(படம்=15)

இங்கேயும்:—

$(\text{கர்ண})^2 = 1 = \left\{ (\tfrac{3}{5})^2 + (\tfrac{4}{5})^2 \right\}$

$= \left\{ \tfrac{9}{25} + \tfrac{16}{25} \right\} = (\tfrac{25}{25})$ இதன்மூலம்

$= (\tfrac{5}{5}) = 1.$ ஆகும். (1)—

$(\text{கோடி})^2 = 1 - (\tfrac{3}{5})^2 = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} = (\tfrac{4}{5})^2$

$\therefore$ கோடி $= \tfrac{4}{5}$. ஆகும். (2)—

புஜவர்க்க $= (\text{புஜ})^2 = (1 - \tfrac{16}{25}) - \tfrac{9}{25} = (\tfrac{3}{5})^2$

$\therefore$ புஜ $= (\tfrac{9}{25})^{\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{5}$. (3)—

இவைகளை மற்றோர் விதத்தாலும் கணிக்கலாம்.

$(\text{கர்ண})^2 = 2 \times \tfrac{3}{5} \times \tfrac{4}{5} + (\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5})^2 = (\tfrac{1}{5} + \tfrac{24}{25})$
$= \tfrac{25}{25} = (\tfrac{5}{5})^2$ $\therefore$ கர்ண $= 1$. (1)—

$(\text{புஜம்})^2 = (1 + \tfrac{4}{5})(1 - \tfrac{4}{5}) = \tfrac{9}{5} \times \tfrac{1}{5}$
$= \tfrac{9}{25} = (\tfrac{3}{5})^2$ $\therefore$ புஜத்தின் $= \tfrac{3}{5}$; (2)—

$(\text{கோடி})^2 = (1 + \tfrac{3}{5})(1 - \tfrac{3}{5}) = \tfrac{8}{5} \times \tfrac{2}{5}$
$= \tfrac{16}{25} = (\tfrac{4}{5})^2$ $\therefore$ கோடிக்கு $= \tfrac{4}{5}$ என்றாகும் (3)—

மற்றும் வருவனவெல்லாமிப்படிக் கொள்க:—

இவ்வித வழிகள் ஸமத்ரி கோண க்ஷேத்திரத்திலும், ஸமசதுரம், நீண்ட சாற் சதுரமிவைகளிலும் வெகுவிதத்தில் உபயோகமாகின்றன. விவரங்கள் யாவும் மேலே படிக்கத் தெறியும்.—

இங்கே இஷ்டமான கோடி புஜகர்ணங்களில் ஏதாவது ஓர் அவயத்தையும் இஷ்ட லக்கத்தையுங்கொண்டு மற்ற இரு அவயங்களைக் கணிக்கும்விவரம்

இவ்விதமேற்படும் க்ஷேத்ரங்கள் ஜாத்ய த்ரிகோண (நேர்க்கோண முக்கோண) ங்களுக்கே உறியன.

(1) இஷ்ட புஜத்தை, ரட்டித்த இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கு, இதை இஷ்டலக்க வர்க்கத்தில் ஒன்று குரைத்ததால் வகுத்த ஈவு கோடி. இதை இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கியதில் புஜத்தைக் கழித்தால் கர்ணமாகும்.

இதற்கு உதாரணம் (1)—

இஷ்டபுஜ $= 12$, இஷ்டலக்க $= 2$

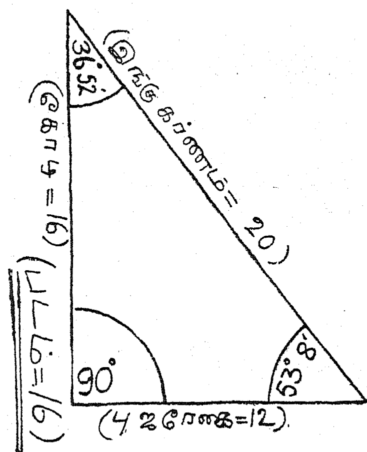
$\therefore$ (கோடி) $= (16)$ ரு

$$= \frac{2 \times \text{இஷ்டலக்க} \times \text{இஷ்டபுஜ}}{[(\text{இஷ்டலக்க})^2 - 1]}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 12 = 48}{(2^2 - 1) = (4-1) = 3} = 16.$$

(கர்ணம் $= 20$) ரு

$$= \begin{cases} (\text{கோடி} \times \text{இஷ்டலக்கம்} - \text{புஜம்}) \\ = (16 \times 2 - 12) = (32 - 12) = 20. \end{cases}$$



இவ்வித உதாரணப்படி;—

(2) இஷ்ட லக்கம் 3, புஜம் 12. இவைகளால் ஏற்பட்ட கோடி $= 9$ம், கர்ணம் $= 15$ ஆகும்.

(3) இஷடலக்கம் 5. புஜம் $= 12$ இவைகளால் ஏற்பட்ட கோடி $= 5$, கர்ணம் $= 13$ என்றாகும்.

மற்றும் வரும் புஜ இஷ்ட லக்கங்கட்கு இவ்விதமே கோடி கர்ணங்கள் கணித்துக் கொள்க.

குறிப்பு:— ஆனல் இவ்விதம் இஷ்டபுஜம் $= 13$, இஷ்டலக்கம் $= 9$. இவற்றல் சரியானபடி கோடி கர்ணங்கள் ஏற்படவில்லை. மேலே காட்டிய விவரணம் படிக்கு என்பதுங் கவனிக்குக.

இதற்கு வேறுவிதமான வழியுமுண்டு:

விவரணம் (2)

இஷ்ட புஜவர்க்கத்தை இஷ்டலக்கத்தால் வகு ஈவை ரண்டிடத்தில் வை இஷ்ட எண்ணை ஒன்றில் சேர், மற்றொன்றில் கழி வந்த தொகைப்பாதியே கர்ணமும் கோடியுமாம்.

இதற்கு உதாரணம்:—

இங்கும் புஜம் = 12, இஷ்டலக்க = 2.

$$A = \left\{ \frac{(\text{புஜம்})^2}{(\text{இஷ்டலக்கம்})} \right\} = \left\{ \frac{(\text{புஜம்} \times \text{புஜம்})}{(\text{இஷ்டலக்கம்})} \right\}$$

$$\text{கோடி} = \tfrac{1}{2} (A - \text{இஷ்டலக்கம்});$$

$$\text{கர்ணம்} = \tfrac{1}{2} (A + \text{இஷ்டலக்கம்})$$

$$\text{கோடி} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{12 \times 12}{2} - 2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{144}{2} - 2\right) = \tfrac{1}{2}(72 - 2) = \tfrac{1}{2}(70) = \mathbf{35}.$$

$$\text{கர்ண} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{12 \times 12}{2} + 2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{144+2}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(72+2) = (74) = \mathbf{37}.$$

இவ்விதம் இஷ் எண் **4** ஆல் ஏற்பட்ட புஜகோடி கர்ணங்கள் = 12, 16, 20;ம் **6**ல் ஏற்பட்டவை முறையே 12, 9, 15 என்றுமாகிறது.

இஷ்ட கர்ணத்தாலும், இஷ்ட வெகுலக்கத்தாலும் இக்கர்ண சம்பந்தியான வெகு கோடிபுஜங்களைக் கணிக்க:—

கர்ணரட்டிப்பை. இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கியதை, இஷ்ட எண் வர்க்கத்தோடு ஒன்று சேர்த்த துகையால் வகு. ஈவே கோடி. இக்கோடியை இஷ்ட எண்ணால் பெருக்கியதில் கர்ணங்கழித்த மிச்சமே புஜமாகும்.

(இதற்குச் சமீகரணம்).—

$$\text{கோடி} = \left\{ \frac{(2 \times \text{இஷ்ட எண்} \times \text{கர்ணம்})}{\left\{ (\text{இஷ்ட எண்})^2 + (1) \right\}} \right\};$$

$$\text{புஜம்} = (\text{கோடி} \times \text{இஷ்ட எண்} - \text{கர்ணம்}).$$

இதற்கு உதாஹரணம்:— கர்ண = 85. இஷ்டலக்க = 2

$$\therefore \text{கோடி} = \mathbf{68} = \frac{2 \times 2 \times (\text{கர்ண} = 85)}{(2^2+1) = (4+1) = 5} = \frac{340}{5} = \mathbf{68}.$$

$$\text{புஜம்} = (\mathbf{51}) = (68 \times 2 - 85) = (136 - 85) = \mathbf{51}.$$

இஷ்ட எண் 4 ஆல் ஷை கர்ண = 85க்கு ஏற்பட்ட கோடி = **40**, புஜம் = **70**. ஆகும்.

(2) இதற்கு மற்றோர்வழி:—

கர்ணரட்டிப்பை, இஷ்ட எண்வர்க்கத்தோடு ஒன்று சேர்ந்த துகையால் வகு; ஈவைக் கர்ணத்தில் கழித்ததே கோடியும், ஈவையே இஷ்ட எண்ணால் பெருக்கியது புஜமுமாகும்:—

இதற்குச் சமீகரணமிங்கு:—

$$B = (\text{ஈவு}) \left\{ \frac{\text{கர்ணம்} \times 2}{\left\{ (\text{இஷ்டஎண்})^2 + (1) \right\}} \right\}$$

கோடி = (கர்ணம் — B); புஜம் = (B × இஷ்ட எண்).

இஷ்ட கர்ண = 85, இஷ்ட எண் = 2 இவற்ருல்:—

கோடி புஜங்கணிக்க உதாரணம்:—

$$B = (\text{ஈய்வு}) = \frac{85 \times 2}{(2^2 \times 1)} = \frac{170}{5} = 34.$$

= (34 × 2 = 68,) = புஜம் = 68.

கோடி = (85 — 34) = 51.

என்பதாகும்:—

இவ்வித இஷ்டஎண் = 4 ஆலும், 85 கர்ணத்தாலும் ஏற்பட்ட கோடி = 75, புஜம் = 40:—

இங்கு பெயருக்கு புஜ கோடி என்ற ஸம்க்ஞையே தவிற கர்ணமென்றும் இரு புஜமென்றும், அல்லது இருகோடிகளென்றும் சொல்வதே உலகவழக்கி லுள்ளது கவனிக்குக — இதனுல் ஒன்றும் ஸ்வரூப (உருவ) பேதமில்லை:—

இருவிதமாகிய இஷ்ட எண்களாலே (லக்கங்களாலே)யே, கர்ணம், புஜம், கோடி ஆகிய ஜாத்ய த்ரிகோண க்ஷேத்ர சம்பந்தமான மூன்றவயங்களையும் கணிக்க:—

இருவித இஷ்ட எண்களை ஒன்றுக் கொன்று பெருக்கியதை ரட்டித்ததே கோடி. இருவித எண்களின் வர்க்க வித்யாசமே புஜம். இருவித எண்களின் வர்க்க(க் கூடுதலே) சேர்க்கையே கர்ணமுமாம்.

இதற்குச் சமீ கரணம்:—

இங்கு இருவித இஷ்ட எண்களின் ஒன்றை (A) என்றும். மற்றொன்றை (B) என்றுங் கொண்டால் அப்போ:—

ஸாஜாத்யத்ரி புஜாவயவங்களாகிய கோடி, புஜ, கர்ணங்கள் கணிக்க:—

$$\left.\begin{array}{lll} (\text{கோடி}) & = (2 \times A \times B,) & (1) \\ (\text{புஜம்}) & = (A^2 - B^2) & (2) \\ (\text{கர்ணம்}) & = (A^2 + B^2) & (3) \end{array}\right\} \text{என்பதாகும்.}$$

இதற்கு உதாஹரணமிங்கு:—

இரு இஷ்ட எண்களில் $A = 3$, $B = 2$, ஆகக்கொண்டால்:—

கோடி புஜ கர்ணங்களை ஸமீகரணப்படிக் கணிக்க.—

கோடி $= (2 \times A \times B) \therefore = 2 \times 3 \times 2 = \mathbf{12}$ ஆகும்.—

புஜம் $= (A^2 - B^2) \therefore = (3^2 - 2^2) = (9 - 4) = \mathbf{5}$ ஆகும்.—

கர்ணம் $= (A^2 + B^2) \therefore = (3^2 + 2^2) = (9 + 4) = \mathbf{13}$ ஆகும்.—

இவ்விதமே இஷ்ட எண்களை $(A = 5,\ B = 4)$ ஆகக் கொண்டலப்போ:—

கோடி $= (2AB) \therefore = 2 \times 5 \times 4 = \mathbf{40}$.

புஜம் $= (A^2 - B^2) \therefore = (5^2 - 4^2) = (25 - 16) = \mathbf{9}$.

கர்ணம் $= (A^2 + B^2) \therefore = (5^2 + 4^2) = (25 + 16) = \mathbf{41}$.

$\because$ (கர்ண)^2 = (கோடி)^2 + (புஜ)^2

(இக்கர்ண)^2 $= 1681 = (1600 + 81) = (41^2 = 1681)$
$= (40^2 = 1600) + (9^2 = 81)$ என்றும்.

அல்லது $A = 63$, $B = 60$, எனக் கொண்டாலும்:—

(கோடி)$= (2 \times A \times B) = 2AB \therefore = 2 \times 63 \times 60 = 2 \times 3780 = 7560$.
(புஜம்) $= (A^2 - B^2) \therefore = (63^2 - 60^2) = (3969 - 3600) = 369$.
(கர்ணம்) $= (A^2 + B^2) \therefore = (63^2 + 60^2) = (3969 + 3600) = 7569$.

இங்கே:— (கர்ண)^2 $= \left\{ 7569^2 = (57289761) \right\}$

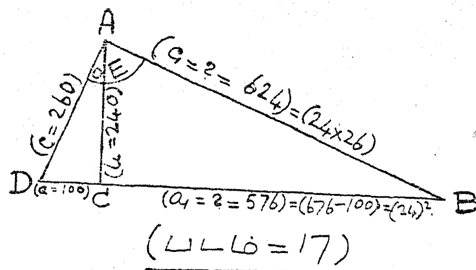
$$= \left\{ (7560^2 = 57153600) + (369^2 = 136161) \right\};$$

என்று இவ்விதமெல்லாம் இஷ்ட இருஎண்களின் படிக்குக் கோடி புஜ ர்ண ங்கள் அமையும்.

முன் சொல்லியவைகளைவிட மேலமைக்கப்பட்ட ஸூத்ர (ஸமீகரண) ஸாதந கோடி புஜகர்ணங்களே எங்கும் எப்போதும் வித்யாஸமடையாது என்பது

இனி ஜாத்யத்ரிகோணரேகா க்ஷேத்ரத்தை ஸஜாதி (ஏகஜாதி = ஒரேஜாதி) யாகவே சம்பந்தித்த மற்றோர் த்ரிகோண க்ஷேத்ரத்தை முன் தெரிந்த க்ஷேத்திர உருப்புகளால் கணிக்க வேண்டிய விகித விவரணம்:—

இந்த க்ஷேத்ரத்தைப் பற்றி முதலில் தெரிந்து கொள்ள வேண்டிய சில விஷயங்கள் இங்கு



(படம்=17)

குறிப்பு:— $\angle O = B, \angle D = E$

$\therefore 90^\circ = (O+E) = (D+B).$

$90^\circ = (D + O) = (B+E).$

என்பவைகள்.

அவசியங் கவனிக்க வேண்டியவைகள்.

தெரிய வேண்டிய ஜாத்ய(ஸம)த்ரிகோண க்ஷேத்ரம் $= \angle DAB$. என்ற பெரிய ஸமத்ரிகோணம். c, c_1; இவ்விருபுஜங்களும் சேரும்ஸ்தானமாகிய $\angle A = 90^\circ$ பாகையாகிய நேர்க்கோணமாகும்.

இவ்விதமே a; b புஜங்கள் சந்திக்குமிடமான $\angle C = (90^\circ)$யும் தொண்ணூறுபாகைகள் கொண்ட ஸமத்ரி கோணமாம்.

15 இதில் தெரிந்த திரிகோணம் $\angle DCA$ என்பது. இதில் தெரிந்த புஜங்கள் ($c = 260$, $b = 240$, $a = 100$). இவைகளால் மற்ற abc; புஜங்களை ஸம்பந்தித்த a_1, c_1; புஜங்கள் இரண்டும் தெரியவேண்டியதாக இருக்கிறது.

∴ ஷை உ-ம் கணிக்கவேண்டிய விகிதவழி எப்படி என்றால் :—

இதற்குக்கேவலம் த்ரைராசிக கணிதத்தை மாத்திரம் உபயோகித்தால் போதும் :—

இதற்குச் சமீகரணம் :—

$$(AB) = (c_1) = \frac{b \times c}{a} = \frac{(AC)\,(AD)}{(DC)} = \frac{240 \times 260}{100} = 24 \times 26 = \mathbf{624}.$$

$$(_1 \parallel)\quad \frac{b^2}{a} = \frac{(AC)^2}{(DC)} = (CB) = \frac{(240)^2}{100} = (24 \times 24) = \mathbf{576};$$

அல்லது :—

$\because (CB) = (a_1) = (DB - DC)$ என்றும்.

$$\therefore \text{இந்த } (DB) = \frac{(AD)^2}{(CD)} = \frac{c^2}{a} = \frac{260^2}{100} = 26 \times 26 = \mathbf{676}.$$

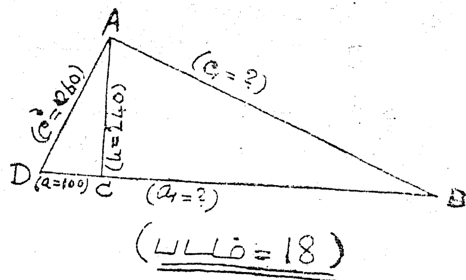
இந்த (676ல்) தெரிந்த (100ஐ) கழித்தாலும் ஷை (a_1)க்குரிய புஜம் = 576 = (676 − 100)ம் வந்து விடும்:—

இஷ்டம் போல் செய்துக் கொள்க.

இதற்கு மற்றோர் வழியு முண்டு:—

இங்கு $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, என்று அமைந்தால் தான் இனி சொல்லப்படும் ஸூத்ரம் இந்த க்ஷேத்ரரேகா ஸாதனத்துக் குறியதாகும்:—

மற்றைய எல்லாக் குறிப்புகளையும், மேலே (படம் 17க்குச்) சொல்லிய படி கிரகித்துக் கொள்ளவும்.



(படம்=18)

இங்கே $= a = 100$; மற்ற விவரம் மேலே பார்க்க—

$$2a\,a_1 = c^2 + b^2 - a^2;$$

இந்த ஸமீகரணப் பிறப்பின் ஸாதக யுக்தி விவ.ணமிங்கே நிரூபிக்கப் படுவதை கவனிக்குக.

$$(a + a_1)^2 = (c^2 + c_1^2);\ c_1^2 = a_1^2 + b^2;$$

$$\because (a + \ )^2 = (c^2 + b^2 + a_1^2).$$

$$\therefore (a^2 + 2aa_1 + a_1^2) = (c^2 + b^2 + a_1^2) = 2aa_1 = c^2 + b^2 - a^2.$$

∴ இதை ஆதாரமாகக் கொண்டு பிறகு:—

ஷை $a = 100$, $b = 240$, $c = 260$, என்று தெரிந்த இதிலிருந்து.

தெரிய வேண்டியதான புஜம் (a_1)ஐக் கணிக்க:- மேற்கூறியபடி ஸூத்ரத்தை உபயோகிக்க:—

$$(100 + a_1)^2 = (260^2 + 240^2 + a_1^2)$$

$$= (100^2 + 200a_1 + a_1^2) = (260^2 + 240^2 + a_1^2)$$

இவ்விரு சமத்துவங்களில் ஒன்றிலொன்றைக் கழிக்க:—

$$\left\{(100^2 + 200a_1 + a_1^2) - (260^2 + 240^2 + a_1^2)\right\};$$ இதில்கவனி.

இரண்டு ஸமஸ்தானத்திலுள்ள இந்த $(+ a_1^2)$ என்பது தனதில்ருணம் போக மிச்சம் $= 0$ ஆனதாலிதன் புரம்பாக நின்றவைகளை விவரணத்தில்பார்.

$$\therefore 200a_1 = (260^2 + 240^2 - 100) = 200a_1 = (67600 + 57600 - 10000)$$

$$= 200a_1 = 115200 \therefore a_1 = \left(\frac{115200}{200a_1}\right) = \mathbf{576}.$$ என்பது.

இதனால் ஏற்பட்ட தென்ன வென்றால்:—

$$a_1 = \frac{(c^2 + b^2 - a^2)}{2a};$$

இவ்விதமே.

$$a = \frac{(c_1^2 + b^2 - a_1^2)}{2a_1}$$ என்பதாம்:

அதாவது மேலே காட்டிய த்ரிபுஜ உருவம் ∠DAB-யில் ∠ ACD தெரிந்து இதனால் (CB)ஐக் கணிக்கவேணுமென்றால், (DC = புஜம், CB = இது ஸம்பாதபுஜம் அல்லது CB புஜமானால் DC ஸம்பதாபுஜம், DB தெரியக்கூடிய கர்ணம், AB தெரியாத கர்ணம். என்று கொண்டால்)

இதற்குப் பொதுவழி:—

தெரிந்த கர்ணவர்க்கத்துடன் தெரிந்த கோடிவர்க்கத்தையும் சேர்த்து இதில் தெரிந்த புஜவர்க்கத்தைக் கழித்த மிச்சத்தை; தெரிந்த ரட்டித்த புஜத் தால் வகுத்த ஈவே, இப்புஜத்துடன் ஸம்பந்திந்த தெரியக்கூடிய கர்ணகண்ட மாகிய மற்றோர் புஜம் வரும்:—

அதாவது இரண்டு த்ரிபுஜ க்ஷேத்ரங்களுக்கு ஒரே கோடியாகிய (படம்-17, 18ல் கண்டபடி) இவ்விரண்டில் ஓர் கோடி, கர்ணபுஜகள் தெரிந்து இவ்வுருப்புகளினால் மற்றய (தெரிய வேண்டிய) புஜத்தையும், இதனால் கர்ணத்தை யுங்கணிக்க இவ்வழி உருவம் முதலிய உபயோகமாம்;—

தலைகீழாக மற்றோர் உதாரணம்:—தெரிந்தவைகள்:— $a_1 = 576$, $b = 240$ என்றுங்கொண்டு மற்றய a, cக்களைக் கணிக்கவென்றால்:— மேற்காட்டிய படிக்கு:—

$$(CD = a = \frac{(AB)^2+(AC)^2-(BC)^2}{2\,(BC)} \Big\} = \frac{(c_1{}^2+b^2-a_1{}^2)}{2a_1}\Big\} \therefore$$

இங்கு.

$c_1{}^2 = 624^2 = 389376$, $b^2 = 240^2 = 57600$, $a_1{}^2 = 576^2 = 331776$; $2_{a_1} = 1152$;:

$$\therefore\ CD = (a) = \frac{(389376+57600-331776)}{1152}$$

$$= \frac{(446976 - 331776)}{1152}$$

$$= \left(\frac{115200}{1152}\right) = 100 \therefore a = 100$$ என்பது.

மற்ற கர்ணங்களாகிய (AB) (AD) (BD) இவைகளைத் தெரிந்த கோடி புஜ ஸகாயத்தால் கணிக்குக ⊙

இவ்வழிக்கும், முன் திறைருசிக வழிக்கும் நெருங்கிய சம்பந்தங்களைக் காண்க ⊙

குறிப்பு:— ஆறு முதலிய தாண்டமுடியாத (ஜலமுள்ள) இடங்களை – B C– ரேகையாக அமைத்து மேற் கூறியபடி (த்ரிகோண உருவமைத்து); (BC) யைக் கணிக்கச் சுலபமாம்:

மற்றும் வருவனவிவ்விதமே:—

குறிப்பு:— இவ்வித க்ஷேத்ரகணிதங்கள்; கோல கணிதத்துக்கே வெகு ஆதாரம். இவ்வித மேற்படும் திறை ருசிக கணிதம் கணிதப்ரபஞ்சத்துக்கே வ்யக்தர்வ்யக்த்த ரூபமுள்ள கடவுள்பே லாம்: இன்னும் விரிக்கிற்பெருகும்:—

வேறு:—

ஓர் நேர்க்கோண முக்கோணத்துடைய கோடியும் கர்ணமுஞ்சேர்ந்த துகையும் புஜமும் தெரிந்த விடத்தில், கோடிகர்ணங்களைத் தனித்தனியே கணிக்கும் வழி:—

கோடி கர்ணங்கள் சேர்ந்த துகையால் புஜவர்க்கத்தை வகுத்த ஈவு துகை; இதை ரண்டிடத்தில் வை, ஒன்றை துகையில் சேர்த்துப் பாதிசெய்தது கர்ணமும், மற்றொன்றை துகையில் கழித்துப் பாதிசெய்தது கோடியுமாக வரும்:—

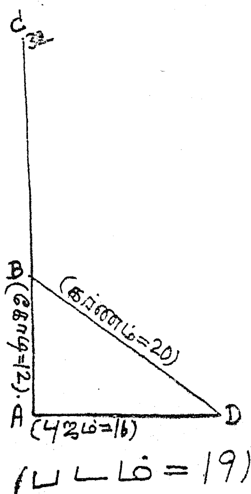
சமீகரணமிதற்கு:—

இங்கே:—

(கோடி + கர்ணம்) = A, (புஜந் தெரியும்)

$$\because \left\{\frac{(புஜ)^2}{A} = B\right\};\quad \left.\begin{array}{l} கோடி = \frac{1}{2}(A-B \\ கர்ணம் = \frac{1}{2}(A+B). \end{array}\right\}$$ என்றும்.

இதற்கு உதாரணம் —



(படம் = 19)

சமபான பூமியில் (32) அடியுயரமுள்ள மூங்கில் மரம் காற்ருல் ஒடிந்து, தன்னடியிலிருந்து (16) அடிதூரத்தில் இதன் நுனி விழுந்தது. ஒடிந்த இடம் ஸம்பந்தித்தே இருக்கிறது. ஆகையால் இதன் நுனிக்கும் ஒடிந்த இடத்துக்குமுள்ள கர்ணரூபம் எவ்வளவு; ஒடிந்த இடத்திலிருந்து இது நிற்குமடியில் எவ்வளவு உயரம். என்பதைத் தனித்தனியே சொல்லென்ருல்:—

இங்கு B கணிக்க:—; புஜ $= 16$

$32 = ($கோடி$+$கர்ண$) = A$

$$\therefore \frac{16^2 = 16 \times 16 = 256}{32} = 8 = B.$$

$($கர்ணம்$) = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(32+8) = \frac{40}{2} = \mathbf{20}.$

$($கோடி$) = \frac{1}{2}(A-B) = \frac{1}{2}(32-8) = \frac{24}{2} = \mathbf{12}$

$\because$ கோடி $= 12$, கர்ண $= 20$, புஜ $= 16$.

$($கோடி $+$ கர்ண$) = 32 = (20+12);$

$($கர்ண$)^2 = \{(20^2 = 400)\} = \{16^2 = 256) + (12^2 = 144)\}$

என்றபடிக் கெல்லாம் சரியாகவே வரும்:—

வேறு:—

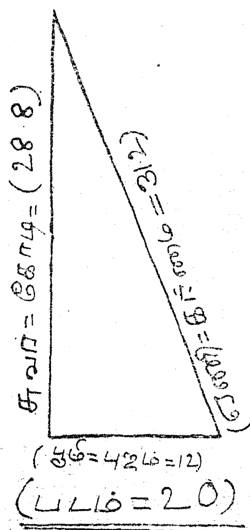
புஜகர்ண (ச்சேர்க்கையும்) யோகமும் கோடியுந்தெரிந்த இடத்தில், யோ (ஏ) கமாயுள்ள கர்ணபுஜங்களைத் தனித்தனியே நிச்சயிக்கும் வழி:—

தெரிந்த புஜகர்ணயோகத் தொகையால் கோடி வர்க்கத்தை வகுத்த ஈவை ஷை துகையில் சேர்த்துப் பாதிசெய்ய கர்ணமும், கழித்துப் பாதிப் பாதிசெய்ய புஜமும் வந்துவிடும் (இதுவும் முன் சொன்னமாதிரியேதான், ஆனல் ஸ்தான பேதம் மாத்திரமேயாகும்.)

இதன் சமீகரணம்:—

ஷைக்கு க்ஷேத்திர விளக்கமிங்கு:—

படம் **20** ஐப்பார்:—



(படம் = 20)

இங்கு (புஜம் + கோடி) = துகை.

$C = \frac{(\text{கோடி})}{\text{துகை}}$; } ; { புஜம் $= \frac{1}{2}$ (துகை — C) ; கர்ணம் $= \frac{1}{2}$ (துகை + C) } .

இதற்கு உதாரணம்:— விஞுருபத்தில்:—

மேற் பரணையில் ஓர் நெல் களஞ்சியம் இதில் நெல் முதலிய தானியங் கொட்ட ஓர் சுவற்றில் (28.8) அடி உயரத்தில் ஜன்னல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இச்சுவத்தினடியிலிருந்து ஏற; ஜன்னலில் சாத்தி இருக்கும் ஏணி அடிவழியாகக் கணக்கிட்டால் மொத்தத்துகை = (43·2) அடிகள் உள்ளன. ஆகையால் கர்ண உருவில் சாத்தியிருக்கும் ஏணியின் நீளமென்ன, சுவத்தடிக்கும். ஏணியடிக்கு முள்ள அந்தரான பூமியாகிய புஜஉருவ நீளமென்ன சொல்லென்றால்:—

துகை = (43·2)! கோடி = 28·8.

$$\therefore C = \frac{\text{கோடி} \times \text{கோடி}}{\text{துகை}} = \frac{829\cdot44}{43\cdot2} = \frac{(28\cdot8)^2}{43\cdot2} = 19\cdot2.$$

$$(\text{கர்ணம்}) = \tfrac{1}{2}(43\cdot2 + 19\cdot2) = \frac{62\cdot4}{2} = \mathbf{31\cdot2.} = \text{ஏணி நீளம்}$$

$$(\text{புஜம்}) = \tfrac{1}{2}(43\cdot2 - 19\cdot2) = \tfrac{24}{2} = \mathbf{12.0} = (\text{சுவர், ஏணியடி—நீளமிது}).$$

என்றாகும். மற்றவை முன்போலறியவும்:—

இங்கே = (43·2) = (ஏணி + பூமி);

ஜன்னல் வறை சுவருயரம் = (28·8) ∴ புஜரூபபூமி நீளம் = 12′ அடி.

கர்ணரூப ஏணி நீள உயரம் = **31·2** அடி என்பதாயுணர்க.

வேறு:-

கோடி கர்ணாந்தரமும், (கோடி கர்ண வித்யாசமும்) புஜமுந் தெரிந்த விடத்தில் கர்ணகோடிகளைத் தனித்தனியே கணிக்கவழி:—

வர்க்கித்த புஜத்தை, கோடி கர்ண வித்யாசத்துகையால் வகு. ஈவை ஷை அந்தரத்தோடு சேர்த்துப்பாதி செய்ய கர்ணமும்; கழித்துப் பாதி செய்ய ஆக கோடியும் தெரியும்.—

ஷைக்குச் சமீகரணம்:—

இங்குத்(துகை) = வகுக்குமெண் = (கர்ணம் — கோடி)யும்; புஜமும்; தெரிந்தவைகளிரண்டு.—

$$D = \frac{(\text{புஜம்} \times \text{புஜம்})}{\text{துகை}} = \frac{(\text{புஜம்})^2}{\text{துகை}} ;$$

$$(\text{கர்ணம்}) = \frac{1}{2}(D + \text{துகை})$$

$$(\text{கோடி}) = \frac{1}{2}(D - \text{துகை})$$

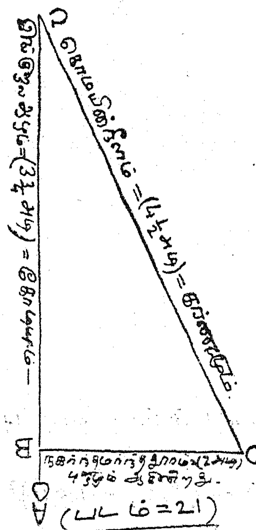
இதற்கு உதாஹரணம்:—

(படம் 21)ஐக் கவனி.

ஓர் குளத்தில் ஜலத்திற்கு மேல் ($\frac{1}{2}$) அறையடி உயரமாகத் தாமரைப்பூ ஒன்று தெரிந்துக் கொண்டிருக்கிறது. சக்ரவாகம், க்ரௌஞ்சம் முதலிய பறவைகளால் வெகுவாய்க் கலக்கப்பட்டு இதன் காற்றின் வேகத்தினால்,

அத்தாமரைப்பூ; இருந்த விடத்திலிருந்து (2) இரண்டடி தூரத்தில் போய் முழுகிவிட்டது. ஆகையால் ஓ காணிக்கனே — நீ — தண்ணீராழத்தையும், அப்பூவின் நுனிவரையிலும் கொடியின் நீளத்தையும் சொல்வாய்:—

குறிப்பு:— இங்கு தண்ணீர் ஆழமே கோடி. பூநுனி வரையில் ஏற்படும்; கொடி நீளமே கர்ணம். இக்கோடி கர்ணாந்தரமே (கர்ண—கோடி) தான் ஜலத்துக்கு மேல் நின்ற தாமரை புஷ்பத்தின்உயரம் ($\frac{1}{2}$)அடியாகும்; இங்கிருந்து பூமுழுகிய தூரமான அடிகளிரண்(2)டே புஜமுமாகும்:



(படம் = 21)

(ஷை AB) = (DC − CB) = கோடி கர்ணாந்தரம் = $\frac{1}{2}$ அடி— (அதாவது ஜலத்துக்குமேல் தெரியும் பூவின் நுனிக் குறிய உயரம் ஆகும்).

ஆகையால் கர்ணமும் கோடியுங்கணிக்கும் உதாஹரணம்:—

இங்கு:— $D = (2^2 \div \frac{1}{2}) = 4 \times 2 = 8.$

கோடியின் $= \frac{1}{2}(8 - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ அடி

கர்ணத்தின் $= \frac{1}{2}(8 + \frac{1}{2}) = \frac{17}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$ அடி

ஆகையால் ஜலத்தின் ஆழம் அடி = $3\frac{3}{4}$ ம்கோடி. பூ நுனிவரை கொடி நீளம் =($4\frac{1}{4}$ அடி) கர்ணமுமாம் உருவம் இதற்கு க்ஷேத்ரம்: படம் 21 ஐக்கவனி.

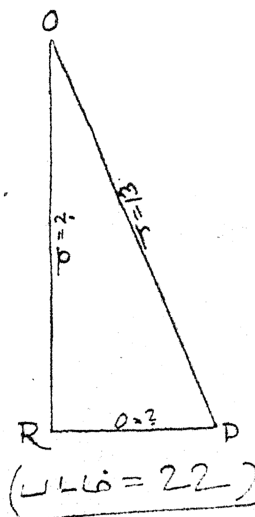
வேறு:—

கோடி புஜங்களின் வித்தியாஸமும், கர்ணமுந் தெரிந்த விடத்தில் கோடி புஜபரிமாணத்தைக் கண்டு பிடிக்கும் வழியிங்கு:—

கர்ண வர்க்கத்தை ரட்டித்ததில் கோடி புஜாந்தர வர்க்கத்தைக் கழிந்த மிச்சத்தின் மூலத்தில் ஷை அந்தரத்தைக் கூட்டியும், கழித்தும் பாதி செய்தவைகளே புஜமும் கோடியும், தனித் தனியாய் வில்வரும்:—

இதன் சமீகரணம் :—

படம் 22ஐ நன்கு கவனி



(படம் = 22)

இங்கே:—

$$A = \left\{(\text{ரட்டித்த கர்ணவர்க்கம்} - \text{கோடி புஜாந்தரவர்க்கம்})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \left\{2\,(\text{கர்ணவர்கம்}) - (\text{கோடி} - \text{புஜம்})^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$=\sqrt{\left\{2\ (\text{கர்ணவர்க}) - (\text{கோடிபுஜாந்தரவர்க})\right\}} = A.$$

$$\text{கோடி} = \frac{1}{2}\left\{(A) + (\text{கோடி} - \text{புஜம்})\right\}.$$

$$\text{புஜம்} = \frac{1}{2}\left\{(A) - (\text{கோடி} - \text{புஜம்})\right\}.$$

இதன் உதாரணம்:—

இந்து தெரிந்தது $(O\ P) = P = 13$,

$(OR - RP) = (p - O) = 7 = (\text{கோடி} - \text{புஜம்})$.

$(2 \times 13 \times 13) = 169 \times 2 = 338;$

$(p - O)^2 = 7^2 = 49$

$A^2 = (A \times A)$ ஷை $(338-49) = \mathbf{289}$

$\therefore A = (\mathbf{289})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(289)} = \mathbf{17}.$

$(p - O) = M = 7$ இங்கு

கோடிக்கு $= \frac{1}{2}(A + M) = \dfrac{(17+7)}{2} = \frac{24}{2} = \mathbf{12}$

(புஜத்தின்) $= \frac{1}{2}(A - M) = \dfrac{(17-7)}{2} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$

$\because$ கோடி $= p = 12$. புஜ $= O = 5$. என்பதாயுணர்க.

(வேறு):—

இங்கு புஜகோடிச் சேர்க்கையும் [(புஜகோடி யோக) = (புஜ + கோடி) மும்]; கர்ணமுந்தெரிந்த விடத்தில், தனித்தனியே புஜமும் கோடியும் கணிக்கும் வழி:—

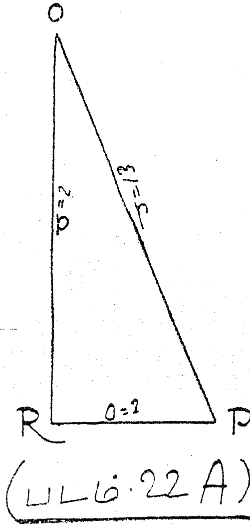
கர்ண வர்க்கத்தை ரட்டித்ததில் புஜகோடியோக வர்க்கத்தைக் கழித்து மூலித்ததை ஷை யோகத்தில் கூட்டியும் கழித்தும் பாதி செய்ததே புஜ கோடிகளுக் குறியத் தனித்தனியான அளவுகளாகும்.—

$$\sqrt{\left\{2\ (\text{கர்ணவர்க்கம்}) - (\text{புஜம்} + \text{கோடி})^2\right\}} = A.$$

$$A = \left\{2\ (\text{கர்ண} \times \text{கர்ண}) - (\text{புஜம்} + \text{கோடி})^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

இங்கு (புஜம் + கோடி) $= B \therefore$

(படம் 22 A ஐக் கவனி):—



(படம் 22 A)

கோடி $= \frac{1}{2}(A + B)$,

புஜம் $= \frac{1}{2}(A - B)$,

குறிப்பு :— இங்கு :—

$17 = (OR + RP) = (p + o) =$ (கோடி + புஜ). $\int \cdot$ PO $=$ கர்ண $= 13 \therefore OR = p = ?, RP = O = ?$ என்பதற்கு உதாஹரணம் முதலியவைக் கவனிக்குக:—

உதாஹரணமிதற்கு :—

இங்கு தெரிந்தகர்ண $= 13$, (கோடி+புஜம்) $= 17$

$\therefore (A) = \left\{ [2(13 \times 13) = (2 \times 169 = 338)] - [(17^2 = 289)] \right\}^{\frac{1}{2}}$

$= (338 - 289)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(49)} = 7 = A.$

$B =$ (கோடி + புஜம்) $= 17 \because$

கோடி $= \frac{1}{2}(A + B) = \frac{(17 + 7)}{2} = \frac{24}{2} = 12.$

புஜம் $= \frac{1}{2}(A - B) = \frac{(17 - 7)}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ கோடி $= 12$, புஜம் $= 5$, கர்ண $= 13$. என்பதாகும்:—

(வேறு)

கோடியின் தெரியாத சிலபாகம் கர்ணத்தில் கூடியிருக்கச் சொச்சக் கோடியும் புஜமும் தெரிந்த இடத்தில், அந்த தெரியாத கோடியம்சம், ஸம்பூர்ணகோடி, கர்ணம் இவைகளின் அளவைக் கண்டு பிடிக்கும் வழியிங்கே காண்க:—

கோடியில் தெரிந்தபாகத்தை ரட்டித்ததோடு தெரிந்த புஜத்தைக் கூட்டிய தனுல், புஜத்தைத் தெரிந்த கோடியின் பாகத்தால் பெருக்கியதை வகுத்த ஈய்வே தெரியாத (தாகிய) கோடியின் (நீளம்) உபரம் ஆகும். இதைக் கோடியிலும் புஜத்திலும் (சேர்த்ததே) கூட்டியதே(சரியான) கோடியும் கர்ணமுமாகும்:—

இதன் சமீகரணம்:—

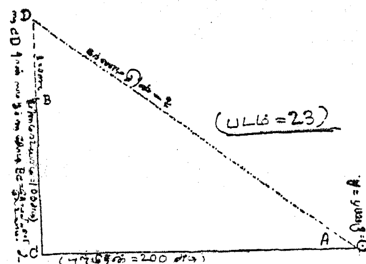
$$\left\{\frac{(\text{புஜம்} \times \text{மிச்சமாய்த் தெரிந்த கோடியாகம்})}{(\text{புஜம்}) + 2\,(\text{தெரிந்தமிச்சக் கோடியாகம்})}\right\} = BD$$

ஸம்பூர்ணகோடி = (தெரிந்த மிச்சக்கோடிபாகம் + B D) ; கர்ணம் = (B D + புஜம்). என்பதாகும்.

இதற்கு உதாஹரணமான வினு:—

ஓர் குரங்கானது (100) அடி உயரமுள்ள பனைமறந்திலிருந்து கொஞ்சம் உயற மாக நேராய்க்கிளம்பிக் கர்ண (குறுக்கு) வழியாகவே அம்மறத்திற்கு (200) அடி தூரத்திலுள்ள (வாபி) கிணற்றையடைந்து ஜலம் குடித்தது. என்றால்:—

அக்குறங்கு அம்மரத்துக்குமேல் உயரக்கிளம்பியதூரம் என்ன? கிணற்றை நோக்க ஆரம்பித்த இடத்தில் இருந்து (கர்ண வழியாய், ஏற்படும், கர்ண மானத்தின்) கிணற்றின் தூறமென்ன? வென்றால்:—



குறிப்பு.—கோடி = (CB+BD).
தெரிந்தகோடி தூரம். அல்லது உயம்=(CB.)
கர்ணம்=DA; A=கிணர்.
மற்றவைகளை விவரணத்தில்பார்:—
இங்கு தெரிய வேண்டியவைகள்.
BD = உயரக்கிளம்பிய நீளம்.
AD = கர்ணம்:—

CD = (CB+BD) = இதே சரியானகோடி.
புஜம் = 200 = CA;
(CB)=CDயில் தெரிந்ததாகிய கோடியின் சிலபாகம். ஆகும்.
ஆகையால் பொதுவான ஸமீகரணம்.

பொதுவாக:—

உயறக்கிளம்பிய தூரம் தான் = BD. (இதற்குச்)

$$= \left\{\frac{(\text{மரக்கிணரந்தரபூமியானபுஜம்})(\text{தெரிந்தமிச்சக்கோடிபாகம்})}{(\text{மரக்கிணரந்தரபூமிபுஜம்}) + 2(\text{தெரிந்தமிச்சக்கோடிபாகம்}}\right\}$$

$= BD = \frac{(AC)\,(BC)}{(AC)+2(BC)}$; ஷை BD = உயறக்கிளம்பிய = (உ. கி) ∵

$\therefore$ ஷை $= (BD) = ($உ. கி$) = \left\{ \frac{(\text{பனைமரம்})\ (\text{மாக்கிணர் தூரம்})}{2\ (\text{பனைமரம்}) + (\text{மாக்கிணர் தூம்})} \right\}$.

$\therefore$ BD = உயரக்கிளம்பிய தூரம் $= \frac{(100 \times 200)}{2 \times 100) + (200)}$

$= \left\{ \frac{20000}{400} \right\} = \frac{200}{4} = 50$ (அடி) = BD;—

கோடி = (C B + B D) = C D.

$\therefore$ ஷை கோடி = (100 + 50) = **150**.

கர்ணம் = A D = A C + B D.

= **250** = (200 + 50) என்பதாகும்.

வேறு:—

உயரத்தில் வித்யாஸ மான இரண்டு மரங்களின் நுனிகளிலிருந்து இவைகளின் எதிரடிக்குக் கர்ண கதியாக க்கயிறு (நூல்) கட்டினால் கர்ண வழியில் இவ்விரு நூலும் சேறு மிடத்திலிருந்து, பூமிக்கு நேர் செங்குத்தான ஆழம் (கீழநந்து மேலானால் உயரம்) என்ன.

இந்த பூமிஸ் தானத்திலிருந்து இருமர அடிகளின் (பூகண்ட) தூரமென்ன வென்றால் இதற்கு வழி:— முதலில் க்ஷேத்ர தரிசனம் செய்ய வேண்டியது.

(பக்கத்திற் காட்டிய படம் 24ஐக் கவனி.)

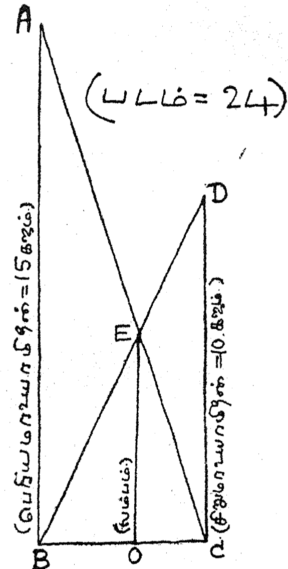
இதில் தெரிந்த அவயவங்களாவன:—

உயர வித்யாமுள்ள இருமரங்களும், இதன் தூர (அந்தர) மும்:— ∵

பெரு மரஉயரம் = (A B) 15. ம்.—

சிறு மரஉயரம் = (C D = 10. ம்.—

இவ்விரண்டின் தூரம் = (B C) = 5. ம்.—



ஆகத் தெரிந்த இம் (3) மூன்றிலிருந்து:—ஒன்றுக் கொன்றின் நுனிக்கு மடிக்குங் கட்டிய இரு கயிறுகளின் (ஸம் பாதத்தில்) சேர்க்கையில் (E)ல் இருந்து பூமியில் (O) ன் ஆழ மென்ன அகாவது O E = ?, B O = ?, C O = ?, இதரமான A C = ?, B D = ?, B E = ?, E C = ?, என்றால் இதைக் கணிக்கும். விவரம்:—

இதன் சிலஉருவுக்குப் பொது வழி:—

பெருமரத்தை சிறுமரத்தால் பெருக்கியதை ஷை பெரு சிறுமரச் சேர்க்கையால் வகுத்த ஈவு (E O) என்கிற லம்பமாகும். (ஷை பெரு சிறு மரச்சேர்க்கையையே வகுக்கு மெண்ணுகிரஹாரமாகக் கொள்ள வேண்டிய திங்கு).

மாத்தூரத்தை (B C)ஐ, பெரிய மாத்தால்பெருக்கி ஹாத்தால் வகுக்க பெருபூகண்டம் (O B) தெரியும். மாதூரத்தை சிறுமாத்தால் பெருக்கி ஹாத்தால் வகுத்த ஈவு சிறுபூகண்டம் (O C) தெரியும்.

(மற்ற ஸாதனங்களை ஸமீ காண உதாஹாணங்களில் காண்க):—

ஸமீகாணங்களும், உதாஹாணங்களும்:—

$$(1).\ (EO) = \frac{(AB)\times(CD)}{(AB)+(CD)} = \frac{15\times10}{15+10} = \frac{150}{25} = 6 = \text{(இலம்பம்)}$$

$$(2).\ (BO) = \frac{(BC)\times(AB)}{(AB)+(CD)} = \frac{5\times15}{15+10} = \tfrac{75}{25} = 3 = \text{(பெருபூகண்டம்)}$$

$$(3).\ (OC) = \frac{(BC)\times(CD)}{(AB)+(CD)} = \frac{5\times10}{10+15} = \tfrac{50}{25} = 2 = \text{(சிறுபூகண்டம்)}$$

$$(4).\ (AC) = \left\{(AB)^2 + (BC)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = (15^2+4^2)^{\frac{1}{2}} = (225+25)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (250)^{\frac{1}{2}} = \left(15\frac{8114}{10000}\right) = 15.8114.$$

$$(5).\ (BD) = \left\{(CD)^2+(BC)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = (10^2 + 5^2)^{\frac{1}{2}} = (100+25)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (125)^{\frac{1}{2}} = (11.18) = 11\frac{18}{100}.$$

$$(6).\ EC = (OE^2 + OC^2)^{\frac{1}{2}} = (6^2+2^2)^{\frac{1}{2}} = (36+4)^{\frac{1}{2}} = (40)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 6.325.$$

$$(7).\ BE = (OE^2 + OB^2)^{\frac{1}{2}} = (6^2+3^2)^{\frac{1}{2}} = (36+9)^{\frac{1}{2}} = (45)^{\frac{1}{2}}$$

$$=6.708$$

சுலபமாகவே (கர்ணங்கள்) ஸாதனஞ்செய்ய குணகங்களின் ஸாதநம்:—

$$\left(\frac{AC}{AB} = \frac{15{\cdot}8114}{15} = 1{\cdot}0541;\ \frac{AC}{AB} = \frac{15{\cdot}8114}{5} = 3{\cdot}1623;\right.$$

$$\left.\frac{11{\cdot}18}{5} = 2{\cdot}236.\right),$$ கடினமானவர்க மூல கணிதமில்லாமலே; மேற்கண்ட ஸஜாதி (ஒரேஜாதி) யான- $\angle OBE = \angle CBD$; $\angle BCA = \angle OCE$ ஆகிய த்ரிகோண க்ஷேத்ரங்களிலடங்கிய (CA, CE), (BE, BD) ஆகிய கர்ண ரேகைகளைக்கணிக்க :—

உதாரணமிங்கு :—

$$(CA) = \frac{(CE)\times(CB)}{(OC)} = \frac{(CE)\times(BA)}{(OE)}$$

$$= \left(\frac{6{\cdot}325 \times 5}{2} = \frac{15.8125}{}\right) = \frac{15}{6} \times 6{\cdot}325.$$

$= 15{\cdot}8125.$

ஷை $= \left(\frac{5}{2} \times 6{\cdot}325\right) = 15{\cdot}8125.$

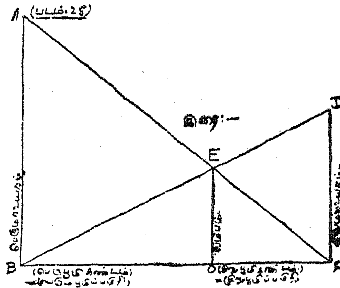
இவ்விதமே :—

$$(BD) = \frac{(BE) \times (CD)}{OE)} = \frac{(BE) \times (BC)}{(BO)}$$

$$= \left(\frac{10}{6} \times 6{\cdot}708\right) = \left(\frac{5}{3} \times 6{\cdot}708\right) = 11{\cdot}18$$ என்றாகும்.

மூன்வர்க மூலகணிதத்தாலும் ஷை CA $= (250)^{\frac{1}{2}} = 15{\cdot}8114$;

BD $= (125)_{\frac{1}{2}} = 11{\cdot}18$ என்று வந்ததைக் கவனி. அவ்வளவு கடினத்தை; சிறிய மூலத்தால் பெரியதைச் சுலபமாகக் கணித்து முடிக்கலாகும் :—



இந்தப் படத்தின் (25ம் படத்தின்) கண்ணுள்ளவைகள் படம் 26, 27ல் (இதன் கீழ்) கண்ட க்ஷேத்ரப் படிக்கு, இரண்டு த்ரிபுஜ த்ரிகோண க்ஷேத்ரங்கள் சேர்ந்திருப்பதாகும்.

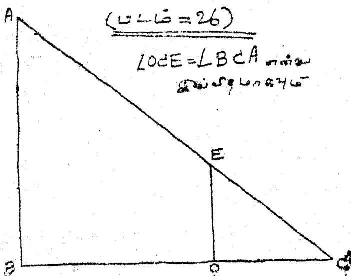
(விவரணம், படம் 26, 27ஐக் கவனிக்கவும்)

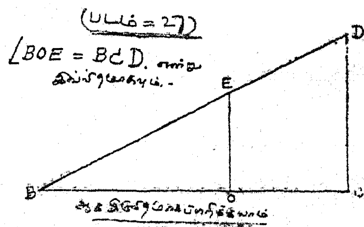
இந்த க்ஷேத்ரத்தைப் பற்றி இன்னும் கவனிக்க வேண்டிய விஷயங்கள்:—

மேலே (படம் 25ல்) காட்டிய க்ஷேத்ரத்தை ஸமஜாதித்ரி கோணங்களடங்கிய இரண்டு க்ஷேத்ரங்களாகப் பிரிக்கலாம்:—

எவ்விதமென்றால்:—

க்ஷேத்ர உருவமாகவே இவைகளைக் காண்பிக்கப்படுகிறது:—

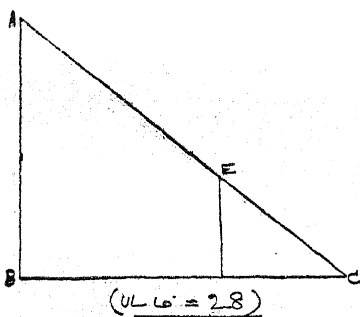




குறிப்பு:—

$\angle OCE = \angle BCA$, என்றும்
$\angle BOE = \angle BCD$, என்றும்

இருவிதமாக வேறுபடுத்தக் குறிப்பில் காண்பித்தபடிக்கு ஒன்றுக்கொன்று எந்த விதத்திலும் (முக்கோணங்களும்) மூன்றுவித கோணங்கள் ஸாம்யமும், புஜங்கட்க் குறிய நியம ரேகைகள் வித்யாஸமாவதோடு ஒன்றுக்குள்ளொன்று அடங்கியிருப்பதாலும் (வர்க்க மூலகணிதக் கடினமில்லாமல்) திறை ரூசிகத்தால் உதாரணத்தில் கண்டவாறு சுலபமாகவே கணித்து விடலாம். இவ்வித க்ஷேத்ர ஸமத்வத்தைக் கொண்டே நம் பூர்விகர்கள் **(3438)** 'கலைகளைக் கொண்ட த்ரிஜ்யா என்கிற (வியாஸார்த்தமாகிய); **(21600)** கலைகள் கோண்ட வட்ட அறைவிட்டமாகிய; கர்ணத்தைக் கொண்டு (வேற்றுமையையே எப்போது மடையாததாகப் பாவிக்கும் கர்ணத்தைக் கொண்டு) 0° முதல் 90° வரையில் ஏற்படும் ஒவ்வொரு பாகாதி காலாதிகளுக்கும், கோடி புஜங்களாக அமையும் புஜஜ்யா, கோடிஜ்யாக்களை நிச்சயித்து இவைகட்க்குறியபடி ஸம்பந்தித்துப், பெரிய த்ரிகோணமாக மேலே காட்டியபடிக் கடையும்) பெரிய த்ரிகோணத்துக்குறிய கர்ணத்தை ஸ்பர்ச கர்ணமாகவும், புஜமாவதை ஸர்சரேகையாவும், மற்ருேர் புஜத்தை ஸதாகாலமும் வித்யாஸமடையாத த்ரிஜ்யா ஆகிய அறை விட்டமாகவும் கணித்து இவைகளை கிரக கணித உபயோக உபகரணமாகவும், இதரமான த்ரிகோணமிதி முதலிய வியவகாரம் முதலியுவுக்குறிய உபகாரணங்களாகவும் கொள்ளுகிருர்கள். இவ்வுபகரணங்களைக் கொண்டே (அடையக்கூடாத) எவ்விதத்திலும் போக முடியாத இடங்களின் தூரம் முதலியவைகளையுமளக்க இயலும் என்பது வெகு விளக்கமே.



(படம் = 28)

இந்த ($\angle ABC = \angle EOC$) என்றதாகிய இந்த பக்கத்தில் காட்டிய க்ஷேத்ரத்தை (82)ம் பக்கத்தில் காட்டிய (படம் **17-18** ஆகஅஸ மந்த) க்ஷேத்ரப்படிக்கும் அமைக்கலாம்.

மற்றுமிந்த க்ஷேத்ரத்துறிய விசேஷ விளக்கம்யாது; எவ்விதம் மாறுபாடாக ஒரே சமத்வத்திலமையுமென்ருல் :—

(படம் **29**ஐயும் கூடவே கவனி)

$\angle COE = \angle COE$, இதிலொன்றும் மாறுபாடில்லை.

மற்றைய :—

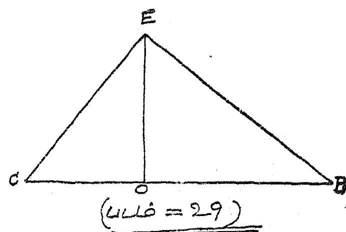
OB, BA, AE, என்கிற புஜரேகைகளே மாறுபாடடையது.

எவ்விதத்தில் என்ருல் :— (OB) ச்குச் சரியாக இதில் (EB); ஆகவும், (CB) க்குச் சமம் (AB) அல்லது (AE) ஆகவுமமைகின்றது. நன்கு கவனிக்க, இன்னும் நிரூபிக்கப்பட்டபடி :—

{(படம் 28ல் உள்ள ரேகைகளுக்கு)} {(படம் 29ல் உள்ள ரேகைகள் சமம்)}

(கீழ்கண்டமாதிரியில்)

EC	=	EC.
EO	=	EO.
OC	=	OC.
OB	=	EB.
(AB=AE)	=	CB.



(படம் = 29)

என்றபடிக்கமைவதைப்பரீட்சித்தும்பார். மேலுமிதிலமைந்த கோணம்:—

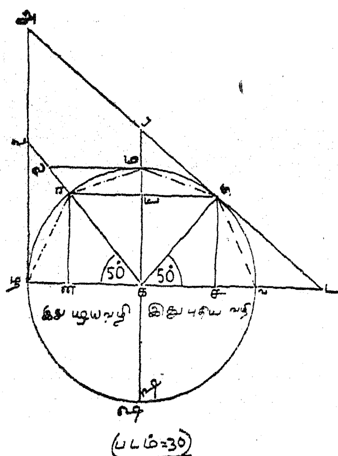
$\angle(COE, \angle BOE) = 90^\circ$

$\angle CEB$யும் 90°

[என்பதையுங்கவனித்தலவசியமாம்]

(இவ்விதமமைந்த க்ஷேத்ரத்தை முக்கிய-ஆதாரமாகக் கொண்டே நவீன முறையில் த்ரிகோண மிதி கணிதத்தை மேலே கூறியபடிக்கெல்லாம் நடத்தி வருகிறார்கள். இவர்கள் மேலே கூறியவட்ட அரைவிட்டத்தை (3438) க்குப் பதிலாக (1) ஒன்று என்றுகொண்டு இதற்கே புஜகோடிகள் நிச்சயித்து ஸ்பர்ச ரேகை (டான்ஜென்ட்) ஸ்பர்சகர்ணம் (ஸீக்கன்ட்) முதலிய நிறுமித்து, இதிலிருந்து; கிரகதி முதலிய த்ரிகோணமிதி கணிதங்களையும் வழங்கிவருகின்றனர்.)

அவ்வுருவங்களிதில் மாறுபாடாகவமையுமிதையும் நன்குகவனிகத்தெரிய வருமென்பது:—



(படம்=30)

விசேஷக்குறிப்பு:—

இவ்விதமமைந்த (இருவழிப்படிக்கு மமைந்த) க்ஷேத்ரங்களினுடைய ஸாம்யத்தினால் வெகு ஆச்சரிய யுக்திக்கமையும் பற்பலவிதங்களான கணித ஸாம்ய முறைகளுமேற்படுகின்றன. அவைகளை விவரிக்கப் புகிலிங்கேபெருகும். ஆகவே:—

சில ஸாம்யங்களைமாத்திரம் பொதுவழியில் கவனிக்கவும். அதிலுஞ் சிற்சில உபகரண விவரணங்களை விளக்கம் செய்யப்பட்டிருக்கின்றது:—

அவ்விரு உருவங்களையும் [படம் (28, 29) போன்ற உருக்களையும்] ஒரே வட்டத்தில் நன்குணருமாறு விளக்கப்படுகின்றது. அவைகளை வெகு நிதானமாகக் கவனிக்க வேண்டியதே அதிக அவசியம் ஆகும்:—

இவைகளின் ஒன்றுக்கொன்றின் வித்தியாசமில்லாத ஸம்பந்தங்கள் எவை எவைகளென்றால்:—

அவைகளாவன:—

மேலே (படம் 30ஐ நன்கு கவனி) காட்டப்பட்டிருக்கும் (⊙ வஷழம) என்கிறவட்டத்திற்கு (கத) என்கிற அரைவிட்டம் (கவ) விலிருந்து (சத) உயரம் இளம்பிறைல் (க) என்கிற வட்ட மத்யகேந்திரத்தில் (50°) ஐம்பது பாகைக் கோணம் உண்டாகிறது, இதையே (வத) என்கிற வில்லாகிற வளைவுக் கோட்டினிடம் கணக்கிட (50°)யாக கொண்ட சாபாம்சம் என்று சொல்லுவார்கள். இந்த (வத) சாபாம்சத்துக்கு (ழர) சாபாம்சம் இந்த இடத்தில் சரியே.

இனி சொல்பவையாவும் ஸரலரேகையை (கோட்டை) அனுசரித்தவைகளே:—

[(கோணம் (அல்லது சாபம்) = 50°) ஐம்பதுபாகைக்கு இங்கே]:—

1. (கத = கர) கர்ண (அரைவிட்ட). மானல் இதற்கு
2. (சத = ரன = கய) புஜம், (யத = யர) = (கச = கன) கோடி.
3. (சவ = னழ) = உஜ்யா, (யம) = கோடி உஜ்யா;
4. (வத = ரழ) = ஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = (கார்டு.)
5. (தம = ரம) = கோடிஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = (குகார்டு).
6. (டத = ழவ) = புஜஸ்பர்சரேகை,
7. (தப = மல) = கோடிஸ்பர்சரேகை
8. (கட = கவ) = புஜஸ்பர்சகர்ணம்
9. (கப = கல) = கோடிஸ்பர்சகர்ணம்

இங்கே விசேஷம்: யாதெனில்:—

(க) என்ற கேந்திரத்தில் ஏற்பட்ட கோணமாகிய (50°)பாகையும், (ப) அல்லது (அ) ஸ்தானத்திலும், இவ் (50) வன்பதின் கோடி கோணமாகிய நாற்பது (90° — 50°) = (40°) பாகையும், (ட) (வ) ஸ்தானங்களிலும், இருப்பதைக் காணலாம்.

படத்தில் காண்பித்தபடிக்கே இருசார்பார் க்ஷேத்ரங்களையுங்கொண்டால் தான் (அ) என்கிற ஸ்தானமேற்படுகிறது. அப்போதும் (ழ) ஸ்தானத்தில் நேர்க்கோண முக்கோணத்துக்குறிய கர்ண ஸம்முக கோணம் தொண்ணூறு (90) பாகையே ஆகும். ஏதாவதோர் மதத்தைக் கொண்டால் (டப) என்கிற கர்ணத்தோடும், அல்லது (கவ) என்கிற கர்ணத்தோடுந்தான் நின்று விடும்.

இவ்விடத்திலடங்கியது ∠(டழஅ) பெரியத்ரிகோண த்ரிபுஜங்கள். ∠(டகப) மபத்ரிகோண த்ரிபுஜங்கள். ∠(டசத) சிறியத்ரிகோணத்ரிபுஜம்: மற்றும்) ∠(டவத); ∠(கமப); ∠(மாலை); ∠(வரழ) இவைகள் யாவும் விஷமத்ரிபுஜ த்ரிகோணங்கள் என்றாகிக்குக.

இவைகளில்:—

∠(டசத) = ∠(டகப) = ∠(டழஅ) என்பவைகள் பரஸ்பரம் ஸாம்யமுடையவைகள். ∠(சனர) = ∠(கழவ) இவைகளும், ∠(கயர) = ∠(கமல) இவைகளும், ஒன்றிலொன்று ஸாம்யமே:—

நவீனமுறையிலுள்ள ஸ்பர்ச (டத) ரேகையும் கோஸ்பாச (தப) ரேகையும் சேர்ந்திருப்பதாலிதே கர்ணம், இதற்கு (கட) புஜஸ்பர்ச கர்ணம் புஜம், (கப) கோடிஸ்பர்ச கர்ணம் கோடி என்பதாம்.

இநுமதத்தையுந் தழுவியபடிக்காகில்:—

$$\text{கர்ணம்} = (\text{அட}) = \left\{\frac{(\text{தட})\,(\text{ழட})}{(\text{சட})}\right\} = \left\{\frac{\text{பட} \times \text{ழட}}{\text{கட}}\right\}$$

$$\text{கோடி} = (\text{ழஅ}) = \left\{\frac{\text{சத} \times \text{ழட}}{\text{சட}}\right\} = \left\{\frac{\text{பக} \times \text{ழட}}{\text{கட}}\right\}$$

புஜம் = (ழட) = (புஜஸ்பர்ச கர்ணம் + த்ரிஜயா). = [(கட) + (ழக)]

இதனுட்புகுந்தால் வெகு வெகு விநோதங்களுள்ள க்ஷேத்ரமானங்களேற்படும். விரிவுக்கஞ்சி இதோடு விடுத்தனம், ஆனாலும் ஓர் விசேஷமிங்கு அவசியங்காணவேண்டியது:—

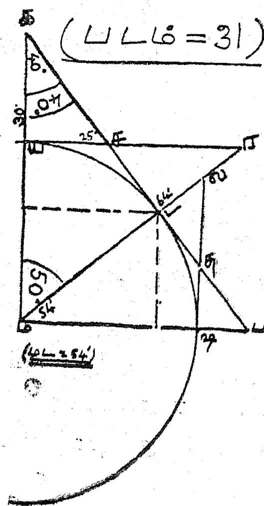
அதாவது

இநுமதங்களிலுமேற்பட்ட ரேகைகளில் சிலவைகளை ஒரேபக்கத்தில் (ஓர் பாதத்திலேயே) அடக்குவோமேயானால்.—

[படம் = 31 ஐப் போல் க்ஷேத்ரம் கீழ்கண்டபடிக்கமையும்:—

நம்முடைய முக்கியப்ராயத்தனத்தினால் தெரிந்த:—

படம் 31ஐ நன்றாகக் கவனிக்குக:—]



[இதைப்பற்றிய மற்றயஸகல விவரணகளும் பெதுவழியில் காணத்தக்கவை மற்றும் இதைச் சம்பதித்தஜ்யாதி (ஸைன்முதலிய) மூலஉபகாரணதி அவயங்களை முன்க்ஷேத்ரத்திலேயே நன்கு விவரணஞ்செய்யப்பட்டதாகும்.]

(கய) ரேகையையும் (க) ஸ்தானகோணத்தையும், அல்லது (ஷப)ரேகையையும் (ப) ஸ்தான கோணத்தையுங்கொண்டு தெரியாததாகிய அறைவிட்டமான (மட) [=(மஷ) = (மய)] வைக்கணிக்கவேண்டிய விகிதம்:—

நன்ருகப்பூமிதிஸாதனத்தில் கூறப்படுகின்றது.

அஃதுஎவ்வாறெனில்:—

பூமியின் மேற்பரப்பிலுள்ள ஓர்மலையின் உச்சியில் ஏறி நின்றபோது நம் கண்ணின் ஸ்தானத்தை (க) என்கிற ஸ்தானமாகக் கொண்டால் (யக) என்பது பூமிமேலிருந்து நம்கண் வரையிலுள்ள உயரம். இது சுலபத்தில் தெரிந்துக்கொள்ளக்கூடியதே (க) விலிருக்கும் கண்ணுல் சமீபத்தில் இருக்கும் (கடல்மறையுந் தூரத்தை) அதாவது (கடலும் வானமும் தொடுந்தூரத்தை) நோக்கிக் கோணமானியால் (வெகுசூக்ஷ்மமாகிய கோணமானியாக இருத்தல் வேண்டும்) அளக்க (அக்ஷர்ணரேகையைத்தொடும், கீழிருந்து மேல்நோக்கும் கோணம்) ஏறு கோணம் ஏற்படும்: (இதை பாகை கலை விகலை பர்யந்தமும் வெகுசூக்ஷ்மமாக அளக்கவேண்டியதாகும்: இல்லையேல் பிசகும் ஸ்தூலத்துக்குத் தக்கபடி) பிறகு த்ரிகோணமிதி விகிதப்படிக்கு அவ்வித மேற்பட்ட ஏறு கோணத்துக்கு ஸ்பர்சகர்ணமும் (ஸீக்கன்டும்), ஸ்பர்சரேகையும் (டான்ஜண்டும்) தெரிந்து இவற்றை (யக) உயரத்தால் பெருக்கக் கர்ணமும் கோடியும் (யக) என்கிற புஜத்தினளவுக்கேற்படும். ஆகையாலிங்கு (க) என்கிற கோணத்திற்கு (யக) புஜம், (யச) கோடி, (கச) கர்ணம், என்பதை முதலில் தெரிந்து கொண்ட பிறகு:—(கச) என்கிற கர்ணத்தோடு (யச) என்கிற கோடியைக் கூட்டிஞல் இது (கசடதப) என்கிற நேர்க்கோட்டில் (கட) என்கிறவரையிலுள்ள (கர்ண) ரேகை யைக் காட்டுகிறது. இந்த (ட) வில்தான் (90) தொண்ணூறு பாகையில் சந்திக்கும் (மட) என்கிற மற்றோர் புஜமிருக்கிறது. இதுதான் தெரியவேண்டிய (மட) வாகிய பூமியின் அரைவிட்டம்.

பிறகு (க) கோணஸ்பர்சரேகையால் (கட) வைப் பெருக்கியதே (மட) வாகும். (கட)வை (க) கோண ஸ்பர்சகர்ணத்தால் பெருக்க (அல்லது-க-கோண கோடிஜ்யாவால் வகுக்க ஸவு), (மக) என்கிற கர்ணமும் வரும். ஆகவே (கடம) என்பது ஓர் ஸமத்ரிகோணமாயமைந்தது.

இதற்கும் உதாரணம்:— காண்க.

மேலே காட்டியபடத்தின் (மயஷ)வை ஓர் வட்டமாகவும் வட்டத்துக்கு மேல் நின்றவனின்கண் உயரம் - (யக) = 30. ஆகவும், இங்கிருந்து கடல் கோடியாகிய ஆகயந்தொடுமிடத்தை நோக்குங் கோணம் ($க^\circ = 40^\circ$) நாற்பது பாகையாகவுங்கொண்டு - வட்ட அறைவிட்டமாகிய - (மட)வைக் கணிக்க வேண்டுமென்ருல்:—

இதற்கு வேண்டிய உபகாரணங்கள்:—

மேதமாடிகல் டேபிளைப்பார்க்க:—

(க°) ஸ்தானகோணம் 40°க்கு காஸ் = 0.766; டான்ஜென்ட் = 0.839. ஸீகன்ட் = $\left(\frac{1000}{0766}\right)$ = 1.3055; (யக) = 30. ம் ஆனல்:—

(கச) = [(யக) (க° ஸீக்கன்ட்)] = (30 × 1.3055) = 39·2;
(யச) = [(யக) (க° டான்ஜன்ட்)] = (30 × ·8391) = 25.2;
(டச) = (யச)
∴ (கட) = (க° ச + யச) = (39·2 + 25·2) = 64·4.
∴ (கட) = 64·4.

(மட) = (கட) (க. டான்ஜன்ட்) = (64·4 × ·8391) = 53·9 இங்கு தெரிய வேண்டியது அரைவிட்டமாகிய (மட) தாகுகையால் (மட) = 53·9 இவ்விதமே பூமியின் குறுக்களவின்யாதியும் கணிக்க:—

(யக)வை, உயரமலைமேல் நிற்கும் மனிதன்கண் உயரம், (ட)வை க்ஷிதிஜம் (என்கிய ஹொரைஸான்) ஆகவும் (டக), (யக) ரேகைசேரும் (க) கோணத்தையும் கணித்துக்கொண்டு மேற்காட்டிய உதாரணப்படி கிரிகை செய்தால்:—

பூமியின் அறைவிட்டம் = $\left(\frac{7927}{2}\right)$ மைல்கள் என்பதும் வந்துவிடும்.

விசேஷம்:— வேதகணித விகிதப்படிச் சுத்தமாய்க் கணிக்கப்பட்ட பூமியின் வெகுபெரிய அறை விட்டங்களாயமைந்த (உலகவ்யவகாரதிசைகட்குறிய):—

{ தென்வடல் நீளம் மைல்கள் = **3963·296** }
{ கிழக்கு மேற்கு நீளம் மைல்கள் = **3949·791** } இவைகள் இப்படிக்காம்

இன்னும் விவரிக்க விஷயம் விரியுமென்பதால் இதை இதோடு நிருத்தப்பட்டது.—

(வேறு):—

இனி இஷ்டப்படிக்கெல்லா மேற்படும் நிலத்தின் விசாலம் (குழி) கணிக்க விவரம்:—

அகலத்தை நீளத்தால் பெருக்கினுல் நாற்சதுர நிலப்பரப்பு (நிலக்குழி) தெரியும், (1)

நீளத்தை அகலத்தால் பெருக்கிப் பாதிசெய்ததே முக்கோண உருக்கொண்ட நிலத்தின் குழியாம். (2)

நாலுக்கும் மேற்பட்ட சதுரங்கள் கொண்டதானுலும், இவைகளுக்குள்ளே அடங்கியிருக்கும் முக்கோணங்களைக்கொண்டு மேற்கூறியவாறு கணித்து எல்லாம் சேர்க்க அந்நிலக்குழியுமேற்படும்:—

இதற்குச் சில உதாரணம்:—

இது சமசதுரம்

இது நீளம்.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

∴ (4 × 4) = 16 விசாலம்

(படம்=32)

இதில் அகலம் நீளம் ரண்டும் 4 ஆவதால் $(4 \times 4) = (4)^2$ 16 ∴ இந்த நிலக்குழி = 16 ஆம்.

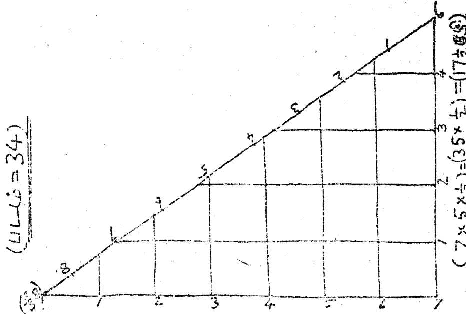
இது நீள்சதுரம்.

நீளம் = 6 அடி.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

(படம் = 33)

இதில் நீளம் = 6, அகலம் = 3;
∴ $6 \times 3 = 18$ இதற்கு இந்த 18 தான் குழியாகும்:—

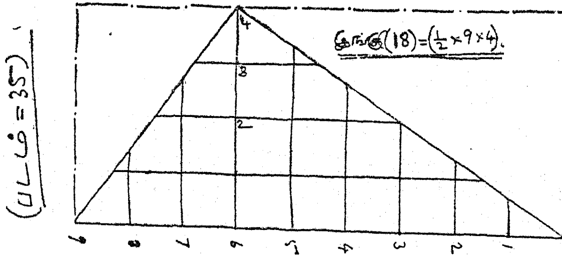


இந்த (படம்-34-ஆகிய) க்ஷேத்ரத்தை நன்குற்று நோக்குவதால் எவ்விதத்திலும் 7ரும். 5ரும். (½ = அரை), ஆவதால் இதற்குறிய விசாலக்குழியும் $=(7 \times 5 \times \frac{1}{2}) = 17\frac{1}{2}$. (பொதுவிதியில் மற்றவை)

(படம் 35)

இது நேர் முக்கோணம்; அகலம் அல்லது உயரம் = 5, நீளம் = 7

$\therefore$ இதன்குழியின் $= \frac{\text{உயரம்} \times \text{நீளம்}}{2} \therefore = \frac{5 \times 7}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$ குழி



சந்தர்ப்பத்தைப்போல் இங்கு கண்ட அகலத்தை உயரமென்றுங்கொண்டு ஷை ஸூத்ரத்தை உபயோகிக்குக. இங்கு இதுதான் விசேஷம்.

படம் 34ஐப்போலவே இதுவும் ஸகலரேகை விகிதத்திலும் ஸாம்யத்தை யடைவதால் இதற்கும் விசாலக்குழி ஸாதனத்திற்கு அதேவழியே ஆகும். (இவ்விதமே படம் 36க்குமாகும்)

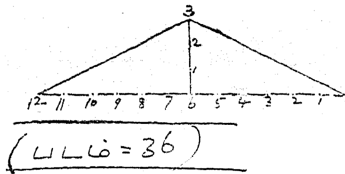
$\therefore$ நீண்ட சதுரவிசாலக்குழி ரூ

$= (\text{நீளம்} \times \text{அகலம்} \times \frac{1}{2})$ இங்கு $= (9 \times 4 \times \frac{1}{2}) = 18.$ ஆகும்:—

இதற்கும் உயர $= 4$, நீளம் $= 9$

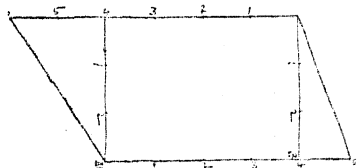
$\therefore \quad \frac{4 \times 9}{2} = 2 \times 9 = 18.$ குழியாகும்.

(படம் 36)



இதற்கு உயரம் $= 3$, நீளம் $= 12 \therefore$ இதன் குழியின் $= \frac{12 \times 3}{2} = 6 \times 3 = 18.$

(படம். 37. ஐக்கவனி)



முன் சொல்லிய க்ஷேத்ரங்களை மனதில் வைத்து இதையுங்கவனிக்க க்ஷே க்ஷேத்ரசாதக வழி நன்குபுலப்படும், மற்றவிவரம் பொதுவழியில் கவனிக்குக:—

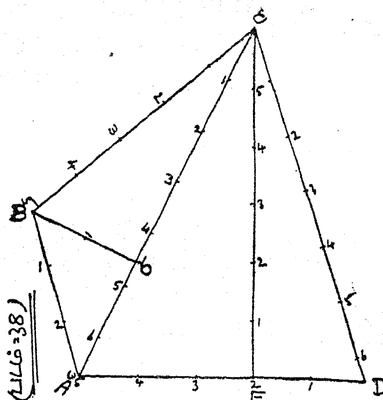
இதைப்போல் இன்னும் பலவித வித்யாசங்களிலும் க்ஷேத்ரங்கள் நிர்மானிக்கப் படும். எதற்குமிதேவழி:—

இவ்விதம் க்ஷேத்ரமமைந்தால் □ DD_1; BB_1; என்று முதலில் க்ஷேத்ரத்தைப் பிறித்து நாற்சதுரமாக்கிக்கொண்டு இதன் குழியோடு. மற்றைய (BB_1C), (DD_1 A,) என்கிற இருத்ரிபுஜ க்ஷேத்ரக்குழியைக் கூட்டினால் ▭ ABCD என்ற விஷமசதுர்புஜக் குழியும் வந்துவிடும்:

$$(\text{க்ஷ}ADCB \text{ குழி}) = [(D_1\ B)(B_1\ D) + \frac{(B_1.\ C)(BB_1,)}{2} + \frac{(AD_1,)(DD_1,)}{2}$$

என்பதாம்.

(படம் 38ஐப்பார்)



இவ்விதம் (ABCDA) என்ற விஷம சதுர்புஜமானாலும் இதில் △ ACD ஒரு முக்கோணம் △ ACB மற்றோர் முக்கோணம்:—

ஆகையால் CE. OB, என்றலம்பலைக்கொண்டு முன்சொன்னபடி செய்து இருவிசாலக்குழிகளையுங் கூட்டினால் க்ஷ (ABCD) என்ற க்ஷேத்ர (விசாலம்) குழி வந்துவிடுமென்பது உணர்க.

இவ்விதம் முதலில் தெரிந்துகொண்டு பின்பு யுக்தியால் எந்தவிதம் எத்தனைவித புஜங்களடங்கிய வெகு புஜ க்ஷேத்ரங்கட்க்கும் விசால மென்கிற குழியளவைக் கணிக்கலாம்:—

குறிப்பு:— வெகு புஜ க்ஷேத்ரமாகில் இவ்விதம் (ABCEAO) போல் க்ஷேத்ர ரேகைகள் நிச்சயித்து இதற்குறிய முன் வழிகளின்படி விசாலக்குழி ஸாதநம் செய்க-மற்ற விவரம் பொதுவிதிப்படிக்காம்.

(ABCDA) க்குறிய குழிகளின் (ஸமம்)

$(=)\ \frac{1}{2}\ EC \times ED. + \frac{1}{2}EC \times AE. + \frac{1}{2}AC \times OB.$ என்றுகும்

மற்றுவருவனவெல்லாமிப்படிப்பார்க்குக:—

இனிமேலிதைப் பற்றி விளக்கம் செய்யவேண்டிய அவசியமில்லை:—

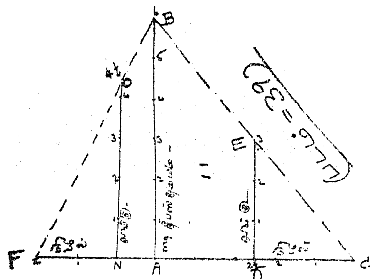
முதலில்:— வினவும் க்ஷேத்ரம் ஏற்படுமா என்பதையும் கவனித்துக் கிரிகை நடத்தவேண்டும்:

(வேறு)

இனி நிழல், நிழலைக்கொடுக்கும் ஸ்தம்பம் முதலிய (கருவி) இவைகளின் சம்பந்தமான வினக்களிங்கு:—

(படம் 39)

இவ்வித (சாயை) நிழலுள்ள க்ஷேத்ரங்கள் வெகுவாய் திரிபுஜ ரூபமுள்ளவைகள் அங்கு சொன்ன கிரிகைகளை யுக்திப்படி இங்கும் செய்ய, நிழல். சங்கு, ஸ்தம்பம், சங்கு தீபாந்தரம் (சங்கு தீபாந்தராளபூமி) இவைகளைக்கணிக்கலாம்:—



இதன் சம்பந்தமான பொதுவழிகள்:— கீழ்க்காண்க:

சங்கு நிழலின் நுனிக்கும், தீபஸ்தம்பத்தின் அடிக்குமுள்ள பூமியினந்தரத்தை சங்குவால் பெருக்கியதை நிழலால் வகுத்த ஈவே தீப (தீபஸ்தம்ப) உயரமாகும்:— (1)—

சங்கு நிழல் கண்டுபிடிக்க:—

சங்கு அடிக்கும் ஸ்தம்ப அடிக்கும் உள்ள அந்தர பூமியை சங்குவால் பெருக்கி (சங்கு உயரத்தால் பெருக்கி) சங்கு கழிந்த தீப உயரத்தால் வகுத்த ஈவே நிழலின் நீளமாகும்: (2)—

இதன் ஸமீகரணமிங்கு:—

இங்கு தீபஸ்தம்ப உயரம் = AB; சங்கு = DE. NO; நிழல் = NF, DC; ஸ்தம்பசங்கு அந்தரபூமி = AD, AN, ∵

$$AB = \frac{(DE)\,(AC)}{(DC)} = \frac{(NO)\,(FA)}{(NF)}$$

$$DC = \frac{(AD)\,(DE)}{(AB)-(DE)};$$

$$(NF) = \frac{(NA)\,(NO)}{(AB)-(NO)}.$$

மற்றவை இவ்விதம் யுக்திபோல் ஸாதனஞ்செய்துக் கொள்ளவேண்டிய தாகும்:—

$$(AB) = \frac{(DE \times AC)}{DC} \therefore = \frac{24 \times 63}{25} = \frac{1512}{25} = 60\tfrac{1}{2}.—$$

ஆகையால் தீப உயரம் $= 60\frac{1}{2}$ ஆகும்:

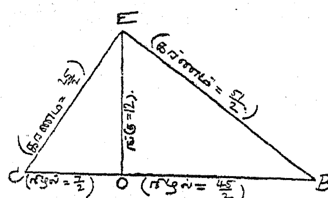
$$(DC) = \frac{(AD \times DE)}{(AB—DE)} \therefore = \frac{38 \times 24}{(60—24)} = \frac{912}{36} = 25\tfrac{1}{3};$$ ஆகையால்

நிழலின் நீள $= 25\frac{1}{3}$; என்பது

மத்தும் வந்தனவெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்க:—

இவ்விதச் சாயா க்ஷேத்ரத்தைப்பற்றிய சிற்சில விசேஷகணிதங்கள் கீழே:—

(படம்= 40)



ஷை க்ஷேத்ரக்குறிப்பு:—

முன்கூறிய க்ஷேத்ரப்படிக்கு (AB) ஓர் விளக்குக் கம்பம் (CD) மற்ருேர் விளக்குக் கம்பம், என்றும் (OE) யை ஷை (12 அடி) சங்குவுமாக நிருத்திஞல் அப்போ:—

சங்குவின் உச்சியிலிருந்து (EC) என்ற ஓர் கர்ணம், (CO) என்ற இக்கர்ண நிழலும், (EB) என்கிற மற்றுமோர் கர்ணம், (OB) என்கிற இக்கர்ணத்துடைய நிழலும் உண்டாகும். என்பதை முதலில் உணர்க:—

(இங்கு இந்நிழல் கர்ணங்களை எப்போதும் [12 அடி] சங்குவைக்கொண்டே ஏற்படுத்திக்கொள்ள வேண்டியதாகிறது.)

இப்படிக் கணித்தக்கர்ணங்கள் $= (\frac{51}{2} = 25\frac{1}{2})$; $(\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2})$. இக்கர்ண (நிழல்கள்) சாயைகளும் $= \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2})$; $(\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2})$:

கர்ணந்தரம் $= (25\frac{1}{2} - 12\frac{1}{2}) = 13.$ அடி

சாயா (நிழல)ந்தரம் $= (22\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}) = 19.$ அடி

சங்குவோ $= 12:$ அடி.

இவ்விதங்களாக ஆகின்றது என்று தெரிய வந்தால் அச்சமயத்தில், CE, EB, என்ற இருவித கர்ணங்களும்; OC, OB என்ற இருவித நிழல்களும், எவ்வளவு அடிகள் உள்ளவைகளாகும் என்று ஒருவஞல் வினவப்பட்டால்

தற்சயம்:— இவைகளைக்கணிக்கப் பொதுவான வழியையிங்குணர்க:—

இவ்விதக் கேள்விகளில் எப்போதும் (சாயாந்தர) நிழலந்தர எண் பெரியதாயும் இதன்கர்ணாந்தர எண் சிறியதாயுமாகவே இருக்கும் என்பது முணர்க:—

(இதற்குப் பொதுவிதி):—

தெரிந்தவைகளான:— நிழல் வித்யாஸ வர்க்கத்தில் கர்ண வித்யாச வர்க்கத்தைக் கழித்தமிச்சத்தால் $\left\{576 = (2 \times 12)^2\right\}$ ஐ வகுத்து ஈவுடன் ஒன்று சேர்த்து மூலிப்பதால் கர்ணாந்தரத்தைப் பெருக்கியதை, இரண்டிடத்தில் வை. சாயந்தரத்தை ஒன்றில் கூட்டிப்பாதி செய்ததும் மற்றொன்றின்றில் கழித்துப் பாதி செய்ததும் இருவிதங்களான நிழல்கள் உண்டாகும் என்பதாம்.

இதன் ஸமீகாணமிங்கு:—

$$\left(\left\{\frac{(576)}{(\text{நிழலந்தர})^2 - (\text{கர்ணாந்தர})^2}\right\} + (1)\right)^{\frac{1}{2}} = \text{கு} = \text{குணகம்.}$$

$$\left\{\begin{matrix}(\text{இருவித நிழல்கள்}) \\ = \text{ஷை}(\text{வித்யாஸங் கொண்ட} \\ \text{இருவித நிழல்கள்})\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{(\text{கர்ணாந்தாம்} \times \text{கு}) \pm (\text{நிழலந்தாம்})\right\}$$

இதற்குஉதாஹரணம் :—

தெரிந்த சாயாந்தரம் = 19, கர்ணாந்தரம் = 13, சங்கு = 12.

∴ தெரிய வேண்டிய ஷை வித்யாஸம் 19ஐக் கொடுத்த நிழல்களைக் கணிக்க:—

19ன் வர்க = 361, 13ன் வர்க்க =169, இதன் வித்யாஸ = (361—169) = (192) இதற்கு ஷை (576)ஐக் குடுக்க ஈவு = 3, இதில் 1 சேர்க்க 4. இதன் மூலம் = 2. இதனால் 13ஐப் பெருக்க 26. இதில் சாயாந்தரத்தை (19ஐ) கூட்டிக் கழிக்க = 45, 7 இவைகளில் பாதிதான் தெரியவேண்டிய நிழல்களின் ஸமம் = $(22\frac{1}{2} = \frac{45}{2})$' $(3\frac{1}{2} = \frac{7}{2})$ அடியளவில் ஆகுமென்பதாம்.

மற்றும் வருபவை இவ்விதமே.

இச்சாயா (நிழல்) க்ஷேத்ரத்தில் மற்றோர் விசேஷமான க்ஷேத்ரஸாதன கணிதம்:—

படம் 41ஐப்பார்:—

இங்கு BO = சம பூமி நீளம்; BA; = விளக்குயாம்.

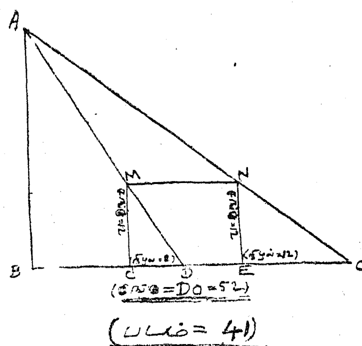
(BO, BD) = விளக்கு அடிக்கும், நிழல்களின் நுனிகட்க்கும் உள்ள நீளம்.

(CM = EN) = சங்குகள் = (12 அங்குல உயர முள்ளவை).

இங்கே தெரிந்தவைகள்.

(MC = NE) சங்குகளும், CD = நிழல் 8 அங்குலம். EO = மற்றோர் நிழல் = 12 அங்குலம். DO = நிழல் நுனிகள் உள்ள பூமியின் தூரம்.

ஆகையால் தெரிய வேண்டியவைகள்:—



(படம் = 41)

AB = விளக்குயர மென்ன

BD = தூரம் = ?

BO = தூரம் = ?

என்றால் இதைக் கணிக்கும் பொதுவழி:—

இருவித நிழல்களின் நுனிகள் உள்ள பூமியந்தரத்தை இஷ்ட நிழலால் பெருக்கி நிழல்களின் வித்யாஸத்தால் வகுத்த ஈவே இஷ்ட நிழல் நுனியில் இருந்து விளக்கடிக்குள்ள தூரமாம். இதை சங்குவால் பெருக்கி நிழலால் வகுக்க, பூமிக்கு மேலுள்ள(தீப) விளக்கு உயரம் வரும்.

இதற்கு ஸமீகர்ணம்:— முதலில்:—

$$\left.\begin{aligned} BD &= \frac{DO \times CD}{EO - CD};\ BO = \frac{DO \times EO}{EO - CD}; \\ AB &= \frac{BD \times MC}{CD} = \frac{BO \times NE}{EO} \end{aligned}\right\}$$

இனி உதாரஹறணம் விவரணம்
செய்யப்படுகிறது:—

$$BD = \frac{52 \times 8}{12 - 8} = \frac{416}{4} = 104;\ \text{இதன் முழம்} = \frac{104}{24} = 4\tfrac{3}{4}.$$

$$BO = \frac{52 \times 12}{12 - 8} = \frac{624}{4} = 156;\ \text{இதன் முழம்} = \frac{156}{24} = 6\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore\ AB = \frac{104 \times 12}{8} = \frac{1248}{8} = \mathbf{156}.$$

$$= \frac{156 \times 12}{12} = 156\ \text{ரு-இதன்} = \text{முழம்} = \frac{156}{24}.$$

$6\frac{1}{2}$ = **AB** தீபம் (விளக்கு) உயரம் அங்குலம் அல்லது முழம்,

இங்கு முழம் 1க்கு அங்குலம் (= 24) ஆகும்.

இவ்வித கணிதவிசேஷமென்னவென்றால்:—

பூமியில் அளக்க முடியாத தூரம் உயரம் இவைகளையுங் கணிக்க இயலு மென்பது.

ஆனால் சந்திரன் முதலிய கிரகங்களின் ஸ்தான சம்பந்தங்கள் வெகு தூரம் தாண்டியும் நிழல்முதலிய வித்யாஸங்களை வேருகக் கணித்தறிவது கஷ்டத்தில் ஆகின்றது. அதுபோலின்றி வித்யாஸமடையுந்தன்மை பெற்ற அவயவங்களுள்ளவைகளாக இருக்கவேண்டும்: என்பதை முதலிலுணர்க:—

வேறு (சில) விசேஷகணிதமிங்கு;—

ஆற்றில் நிறையஜலம் போகும் போது இவ்வாற்றை ஜனங்களால் தாண்ட முடியாமல் போகும், தற்சமயம் ஆற்றினகலம் தெரியவேண்டுமேயாகில்:—

இதைக்கணிக்க வேண்டிய விவரணம்:—

இச்சம்பந்த உருவ அமைப்பிங்கு:—

இந்த உருவப்படத்தில் உள்ள:

(படம்-42—ஐக்கவனி)

(படம் = 42)

A

C

B

D

O

E

(AB) = அளக்கமுடியாததாகிய தெரியவேண்டிய நீளம்.

(BC = CD); (DE) இவைகள் தெரிந்துக்கொள்ளக்கூடிய இடங்களாகும். ஆகையால் (DE = AB) என்றாகும்.

விளக்கமின்னும்:—

முதலில் Aஐ எதிர்கரைமேல் தெரியக்கூடிய ஓர் அடையாள மாகிய அசைவற்ற மரம் அல்லது பாறை முதலியவைகளாகவோ அல்லது வீடு, கோயிலாகவோ கொள்க. பிறகு அதற்கு நேரே-தான் இருக்குமிடத்தில் நேர்க்கோட்டிலமையும்படி தன் முயர்ச்சுயால் Bயில் ஓர் அடையாளம் வை. (B)யிலிருந்து தன்னிஷ்டப்படி (C) தூரத்தில் மற்றோர் அடையாளமும், இந்த (C) விருந்து (BC) அவ்வளவே தூரத்தில் Dயில் மற்றோர் அடையாளமும் வைத்தால்;—

(BC = CD) என்பது ஆகும்.

பின்பு, Dயிலிருந்து DE ரேகையிலேயே — Cஆல் A மறைவுபடும், வரையில் அல்லது ஒரே நேர்கோட்டில் ACE ஆகியவைகள் சம்பந்திக்கும் வரையில் பின்னேக்கினல் அப்போ ACE ஒரே நேர்க்கோட்டிலமையும். இப்படி அமையும் E என்கிறவிடத்தில் ஒரு அடையாளம் வை: இதன் பிறகே உனக்கு ED எவ்வளவு நீளமோ அவ்வளவே நீளம் AB என்பது புலப்படும்.

ஆகையால்தான் AB = DE என்று ஆயிற்று.

குறிப்பு:— இங்கே காட்டப்பட்ட (AB) ரேகையை:—

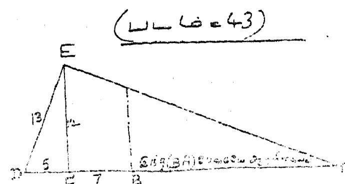
(17—18ம் படத்துக்குச்) ல் சொல்லிய (CB) =(a_1) ரேகையாகப் பாவித்துக் கணிதம் செய்தும் நீளம் நிச்சயித்துக்கொள்ளலாம்

போக முடியாத குளத்தின் எதிர்க்கரை, ஏறிக்கால்வாய் முதலிய அகலங்களையும் இவ்வித ரேகா கணிதப்படித் தெரிந்துக்கொள்ளலாம் சுலபத்தில்:—

(விசேஷம் :—)

(17—18-ம் படத்துக்குச்சொன்ன) க்ஷேத்ரத்தின் கணித்தாலும் ஷ (AB) போன்ற அகலங்கணிக்கலாம். இது கேவலம் கணிதத்தோடு கூடியதாகும், (அவ்வளவு சுகமிதற்கில்லை).

(படம் 43) ஜநன்குகவனி



இந்த க்ஷேத்ரத்தில் நேர்க்கோண முக்கோணங்கள் இரண்டுள்ளன அவைகளாவன:—

∠DEA; இங்கு = ∠E = 90°,

∠ECA; இங்கு = ∠C = 90

இதில் தெரியவேண்டிய கோடு — BA — இதுவும் ABCD ரேகையிலிருக்கிறது. இங்கு (AB) = (AD — BD) ∴.

இங்கு தெரியவேண்டிய கோடு (BA) அல்லது (DA) ரேகை பூருவும்:—

இங்கு தெரிந்தவை ∠DCE = 5; 12; 13 புஜங்காடங்கிய முக்கோணம் இதனல்:—

(DA) என்கிற ∠(DEA)ன் ஓர் புஜமாகிய கர்ண நீளங்கணிக்க:—

முன்சொன்னபடி:—

$$\frac{(DE)^2}{DC} = \frac{(DE)(DE)}{DC} = \frac{13\times13}{5} = \frac{169}{5} = 33{\cdot}8 = DA$$

$\therefore$ (AB)= தெரிந்த (AD − BD) = **(33·8−5−7) = 21·8**

இங்கு:—

BC = 7 $\therefore$ BD = (7 + 5) = 12 ($\therefore$ முன்போல்)

$\therefore$ AB = (33·8 − 12) = **21.8**; என்பது

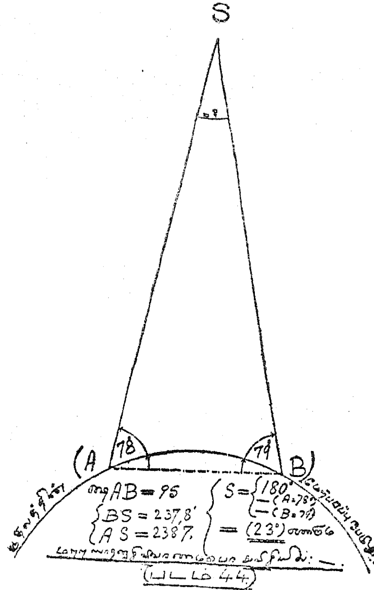
இங்கு தெரியவேண்டிய (AB) = **21·8.,**

குறிப்பு:—இந்த (B) ஸ்தானத்தில் (CE) ரேகையே இருக்கும் எதிர்கரையாக வைத்துக்கொண்டால் (CB) என்கிற கணிதமில்லாமலே சற்று சுலபமாகவும் கணிதம் முடிவுபெறும்.

மற்றும் வந்தனவெல்லாமிப்படிக்கணிக்குக:—

வேறு:—

(படம் **44**ஐ நன்கு கவனி):—



இங்கே:—

ரேகைகளையும் கோணங்களையுமனுசரித்த மற்றோர் விசேஷகணிதம்:

சுமாருக:— (**B** ஸ்தானம்) = மதருஸ் (**A** ஸ்தானம்) = டெல்ஹிஎன்றும், (S) ஸ்தானம் = ஆகாயத்தில் உயரே உள்ள ஓர்நக்ஷத்திரம் என்றுங்கொண்டால் இப்போ AB தூரம், = **95.** (A) கோணம் = 78°; (B) கோணம் = 79°; இவைகளைகொண்டு (S) ஸ்தானத்திய தெரியவேண்டிய கோணம்; AS அல்லது SB தூரம், இவைகளைக்கணிக்க:—

ஒருமனிதன் மதரு(Bயில்)ஸில் நின்று S என்ற நக்ஷத்திர ஸ்தானத்தை மேலே நோக்க (BS) என்ற ரேகை ஏற்பட இதன் ஸகாயத்தால் $\angle$B = 7்0ம்;

இதே ஸமயத்தில் மற்றொருவன் Aஸ்தான மாகிய, டில்ஹி யிலிருந்து S என்ற அதே நக்ஷத்திரத்தை நோக்க AS என்றேற்பட்ட ரேகை ஸகாயத்தால் (78° = A) கோணமும்.

மதராஸ் டில்ஹி தூரமும் நேர் AB ரேகையில் சுமார்(95″ அங்குலம்) என்றும், ஏற்பட.

AS, அல்லது BS தூர அங்குலம் என்ன-S ஸ்தான கோணம் (?) என்ன வென்றால்:—

S = (180° − A − B)

= (180° − 78° − 79°)

= **23°** = S என்பதை முதலில் கணித்துக் கொண்டு.—

மேதமேடிகல் டேபில் (**TABLES**) படிக்கு புஜஜ்ஜியா என்கிற(ஸைன்)

23°ஞ = 0·3907.
79ஞ = 0·9816.
78ஞ = 0·9781.
} என்றும் தெரிந்துக் கொள்க

இதற்க்கு மேல்:—

பொது வழியிங்கே:—

(S கோண = 23°) ஜ்யாவுக்கு இதன்ஸம் முகபுஜமான (AB ரேகை=95'') அங்குலமானால் (A கோண=78°) ஜ்யாவுக்கு (BS) என்கிற ரேகையாகும்:

இவ்விதமே B கோண (79°) ஜ்யாவுக்குASஎன்கிற ரேகை என்பது இவை களும் அங்குலத்தில் தான் வரும்:—

இதற்கு உதாரணம்:—

44ம் படப்படிக்குறிய:—

$$BS = \frac{\text{ஸை } A}{\text{ஸை } S}(AB) = \frac{\text{ஜ்யா } A}{\text{ஜ்யா } S}(AB)$$

$$= \frac{9781}{3907} \times 95'' = \frac{929195}{3907} = \mathbf{237{\cdot}8''} \text{ அங்குலம்}$$

$$AS = \frac{\text{ஸை } B}{\text{ஸை} S}(AB) = \frac{\text{ஜ்யா } B}{\text{ஜ்யா } S}(AB)$$

$$= \frac{9816}{3907} \times 95'' = \frac{932520}{3907} = \mathbf{238{\cdot}7''} \text{ அங்குலம்}$$

∴ BS = 237·8 அங்குலம், AS = 238·7 அங்குலம் என்றேற்பட்டது.

AB (ஸ்தானத்திய கார்டுரேகை) அளவுக்குறிய மைல்கள் முயற்சியால் தெரிந்துக்கொண்டு, BS. AS. மைல்களையும் அல்லது இஷ்டஅளவில் நீளங்களையுங் கணித்துக்கொள்ளலாம்.

இங்கு இக்கணித அதிசயத்துக்காக இதன் உருவ விவாணம் மாத்திரமே காட்டப்பட்டது.

விரிவடையும் பயத்தால் இதோடு நிறுத்திக் கொள்ளப்பட்டது.

(வேறு):—

மற்ருேர் விசேஷ க்ஷேத்ரங்களின் கணிதமிங்கு:—

(⊙ ABCD என்கிற வட்டத்தில் △ AOB, △ BOC, △ COD, △ DOA, என்று நான்கு (த்ரிபுஜங்கள்டங்கிய) த்ரிகோணங்கள் அமைந்திருக்கின்றன. ஸதா (AO, = OB, = OC = OD) இவைகள் எங்கும் ஒரே ஸமமாகவே அறைவிட்ட அளவாகத்தானிருக்கும். நேர்க்கோடுகள (AB = BC = CD = DA) இவைகள் தான் வில்லோரச்சம் பந்தக்கோடு தான்; வித்யாஸம் அடையுமென்பதாம்:—

இந்த வட்டத்துள் நாலு த்ரிகோணங்களமைந்ததாக உருவம் காட்டப்பட்டது ஒரு வட்டத்துள் இரண்டு த்ரிகோணம் முதல் பல த்ரிகோணங்கள் வறையில் படத்தில் காட்டிய வில்லின் ஓர புஜங்கள் மாத்திரம் ஸமவித்தியாஸத்தில் அமையலாம், அமைக்கப்படும்.

இவைகளைக் கணிக்கச் சூத்திரங்களிங்கு:—

குறிப்பு:— இரு த்ரிகோணமென்பதற்கு:—

படம் 45(-A)

∠ABC, ∠ADC இவ்விரண்டுக்கும் பெரிய புஜம் விட்டமாகிய AC யே யாகுமென்பதுணர்க:—

வில்லைத்தொடும்; நாண் உருவமுள்ள AB, போன்ற புஜ நீளங்களைக் கணிக்க:— இப்படி நாணாய் நிற்கும் புஜங்கள்:—

படம் 45 (-A)ல் கவனி:—

[ஸமபுஜங்களாகிய இவைகளின் ஸாதனத்துக்கு வேறுவித வழியை இதன்பின் சோல்லப் படுகிறது.] (இங்கு வட்டத்துள்ளமைந்த முக்கோணங்கள் மூன்று முதல் ஒன்பது வரையிலுள்ளவை களான புஜங்கட்குக் கணிக்கும்வழி):—

(வேண்டிய புஜம் மூன்ருகில் பெருக்கு மெண்ணின்)	=	குணகம். 103923.
(ஷ நான்காகில் ஷ)	=	84853.
(ஷ ஐந்தாகில் ஷ)	=	70534.
(ஷ ஆருகில் ஷ)	=	60000.
(ஷ ஏழாகில் ஷ)	=	52055.
(ஷ எட்டாகில் ஷ)	=	45922.
(ஷ ஒன்பதாகில் ஷ)	=	41031.

இவ்விதமிங்கு (மேலே) காட்டிய பெருக்கு மெண்ணாகிய குணகத்தால் வட்டவிட்டத்தைப் பெருக்கியதை லக்ஷத்திருபத்தாயிறத்தால் (120000) ஆல் வகுத்த ஈவே மேற்சொல்லப்பட்ட உருவுள்ள புஜநீளம் (வில்லின் நாண் நீளம்) ஆக வரும். இதற்கு 4 புஜம் (படத்தில் காட்டிய ரேகை AB) கணிக்க உதாரணம் பார்க்குக:—

இங்கு வட்டத்தின் விட்டம் AC = 110 ஆகில் AB, BC, CD, DA' என்பவைகளின் நீள மென்னவென்றால்:—

(விட்டம் = 110)ஐ (84853) ஆல் பெருக்கியது 9333830 இதை (120000) ஆல் வகுத்த ஈவு $77\frac{93383}{120000}$ அல்லது (78) என்றுங்கொள்க:—

இங்கு ஒன்பது த்ரயச்ரம் (புஜங்கள்) வரை ஏற்படுமவைகட்குத்தான் குணகங்கள் எழுவிதமாகக் கூறப்பட்டிருக்கிறது. விட்டமான வகுக்குமெண் 120000க்கு.

இதற்கு மேலும்-10; 11; 12; 13; 14. 15. 20: 100; 500: முதலிய இஷ்டப்படி புஜங்கள் (த்ரிகோண புஜங்கள்) அமையலாம். அமைக்கலாம். ஆகையால் இவைகளின் ஸாதனத்துக்குரிய வகுக்குமெண் (120000)க்கு வட்டத்தின் விட்டத்தைப் பெருக்கு மெண்களாகிய குணகங்களைச் சாதனம் செய்யும் வழி:—

பாகைகள் 180°ஐ (நூற்றெண்பதை) வேண்டிய முக்கோண எண்ணால் வகு. ஈவுக்குரிய பாகாதிகளின் புஜஜ்யாவை (SIN) (120000)ஆல் பெருக்கு இதே மேற்கூறியபடி குணகமாகிய பெருக்கு மெண்ணாம்:

உதாரணமிங்கு:—

(முன்னுறையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மேத மேடிகல் டேபில்படிக்கமைந்த ஜ்யா இங்கு வேண்டும்.)

த்ரியச்ரம் (புஜம்) 9க்கு:—

$\frac{180^\circ}{9^4}$ = 20°க்கு ஜ்யா (ஸைன்) = 0·342 இதை (120000) ஆல் பெருக்கியது (ஒன்பது புஜகுணகம்) = (120000 × 0·342) = 41040 முன் சொன்ன குணகம் = 41031, இவ்விரண்டின் வித்யாஸம் = 9.

த்ர்யச்ரம் 4க்கு உதாரணம்:

$\frac{180^\circ}{4^4}$ = 45° ஸைன் (ஜ்யா) = 0·7071 இதை (120000)ல் குணிக்க = (0·7071 × 120000) இதல் = 84852, முன் சொன்னது 84853, வித்யாசம் = 1.

இவ்விதமே மற்ற குணகஸாதனமும்:

த்ரியச்ரம் (த்ரிபுஜம் = த்ரிகோணம்) 45 ஆனால் அப்போகுணகங் கணிக்க:—

$\left(\frac{180^\circ}{45}\right)$ = 4° க்கு (ஷை டேபிலில் பார்க்க) ஜ்யா (ஸைன்) = 0·0698 இதை (120000)ல் பெருக்கியதுகை = (.0698 × 120000) = 8376. என்பதாகும்.

மற்றும் வருவன வெல்லாமிப் படிப்பார்த்துக் கொள்ள வேண்டியது என்பதை அவசிய முணர்க—

ஸூக்ஷ்மஜ்யா ஸாதனத்துக்கு முன் ஸ்தூலஸாதனத்தின் பொருட்டு:—
ஸ்தூலமாய்ஜ்யா (ஸைன்) SIN கணிக்கப் போது வழியிங்கு:—

(இஷ்டசாபம் 1° முதல் 90° வரையில் கொண்டும், அரைவட்டம் (பரிதி) 180°ம்-கொண்டாலப்போது இஷ்டபாகை 45° க்கு (ஸைன்) ஜ்யா கணிக்கவேணு மென்றால் (இவ்வேலைகள் தசாம் சவிதத்தில் சுகமாக முடியுமாதலால், அம்முறைப்படி.)

$$\left\{\begin{matrix}\text{இஷ்டசாப ஜ்யா} \\ =(\text{ஸைன்})\end{matrix}\right\} = \left\{\frac{(4\ \text{விட்டம்})\ (\text{பரிதி} - \text{சாபம்})\ (\text{சாபம்})}{\frac{5}{4}(\text{பரிதி})^2 - (\text{பரிதி} - \text{சாப})\ (\text{சாபம்})}\right\}$$

இங்கு பரிதி = 180° ஆகையால் ஷைக்குச்

$$= \left\{\frac{(4\ \text{விட்டம்})\ (180 - \text{சாபம்})\ (\text{சாபம்})}{(\frac{5}{4} \times 32400 = 40500) - (180 - \text{சாபம்})\ (\text{சாபம்})}\right\}$$

இதற்கு உதாஹரணமிங்கு:—

பரிதி = 180°, (இஷ்டசாபம் = இஷ்டபாகை 45°)க்கு ஜ்யா கணிக்கும் உதாரணமிங்கு:—

180°ல் 45° ஐக்கழித்த மிச்சம் = 135°, இதை 45°ல் பெருக்க—6075; இதை 4ல் பெருக்க = **24300.** என்று நிறுத்திவிட்டு.

பின்பு:—

ஷை 6075ஐ, 40500ல் கழித்த மிகுதி = 34425. இதற்கு முன்னிருத்திய 24300 ஐக்குடுத்த ஈவு = **0·7059.** என்று வந்தது. இந்த இஷ்ட சாபம் 45° பாகைக்கு முன்னுறையிலுள்ள மேத மேடிகல் டேபிலைப் பார்க்க **ஸைன்** (ஜ்யா) = **0·7071.** இவ்விரண்டின் வித்யாஸம் 0·0012.
ஷை 0·7071ஐக் கணிக்க த்ரிகோணமிதி ஜ்யாஸாதனம் இனி கூறுவதைப் பார்க்கவும்:—

இந்த முன்னுறையில் கண்ட ஸூக்ஷ்மஜ்யா ஸாதனஞ்செய்ய முன்னே சில உபகரணங்கள் வேண்டியது.

{[ஷை45° ம் பாகைக்கு மாத்திரம் ஜ்யாஸாதனஞ் செய்ய வேண்டுமானால்:—
ஜ்யா (SIN) 45° = $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(0\cdot50)}$ = 0·707107 என்பது.]}

அவைகளின் விவரணமிங்கு:—

சுத்தமான முறைப்படி ஏற்பட்டவைகளாகிய:—

உபவிகலை ($1'''$) க்கு புஜஜ்யா (SIN) = { [சாபம் = $(\pi \div 180^{\circ} \times 60^{3})$ ரு = 0·0000000808022802.........] 0·0000000808022802.......... }

ஷை ரு கோடிஜ்யா = (COSIN) } = 0.9999999 9999999 67355.........

விகலை ($1''$) க்கு புஜஜ்யா (SIN) { { சாபம் = $(\pi \div 180^{\circ} \times 60^{2})$ = 0·00000 48481368111......... } ஜ்யா = 0.0000048481368109......... }

ஷை ரு கோடிஜ்யா = (COSIN) } = 0·99999 99999 88247785.........

கலை ($1'$) க்குறிய புஜஜ்யா (SIN) { { சாபம் = $(\pi \div 180^{\circ} \times 60)$ = 0·0002908882086657......... } ஜ்யா = 0·0002908882045634............... }

ஷை கோடிஜ்யா = (COSIN) } = 0·99999995769202532 8...........

{ ஓர் பாகை (1°)க் குறியவை யாகிய (சாபம் = வட்டம்) } = $\left\{ \frac{\pi}{180^{\circ}} \right\}$ = $\left\{ \frac{3 \cdot 1415926535897932}{180^{\circ}} \right\}$

= 0·0174532925199432 9 $\frac{10}{18}$ = 0·01745329252;

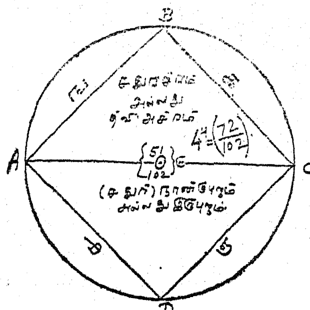
(புஜஜ்யா = SIN) = 0·0174524.........

(கோடிஜ்யா = COSIN) = 0·9999999.......=(-1-)

π = 3·1415926535897932

90° (பாகை) ரு { சாபம் = 1·5707963267948966............ புஜஜ்யா = 1; கோடிஜ்யா = 0; }

(வேறு)



(படம் = 45)

[படம் (—45)]ஐக் கவனி

(புஜம் = 3)

(இ. பு = இஷ்ட புஜங்கள்) ∴

வட்டஒர ஸமபுஜ நீள = ஜ்யா $\left(\frac{180}{\text{இ. பு.}}\right)$([விட்டம்]=[2 அரைவிட்டம்]) ∴

இதற்கிஷ்டத்ரிபுஜ = 3பு

∴ (180 ÷ 3பு) = 60°;

(ஜ்யா 60°) = **0.866**

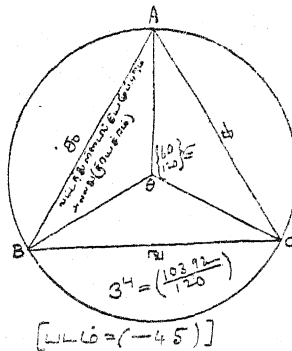
∴ (0.866 × 60 × 2) = 103.92

∴ க = ங = ச = **103.92** ∴

(மேல் வரும் க்ஷேத்ரங்கட்கு மிவ்விதமே கணிக்குக) : —

இஷ்ட புஜங்களை (AB = க), (BC = ங), (CA = ச)

ஆ புஜங்கள் 3ரும் = (3பு) எனக் கொண்டதாம் : —



(படம் 45)ஐக் கவனி

வட்டத்துள்ளடங்கிய நாலு புஜம் (அல்லது இருபுஜம்)

$$\left\{\frac{180^\circ}{4\text{பு}}\right\} = \mathbf{45^\circ};$$

(45° ஜ்யா) = 0.7071

புஜம் = (2 அல்லது 4) (.7071 × 102)

= (72.1242)' = (AB)'

(இங்கு இஷ்ட த்ரிபுஜங்கள் 4.

∴ 180ஐ 4ல் வகுக்க 45° வந்தது. மற்ற விவரம் மேல் நோக்குக)

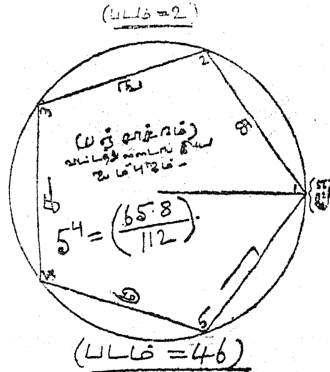
(உள்நோக்கும் பார்வையால் விட்ட அளவில் இருத்ரிபுஜங்களுமுள்ளதைக் வனிக்குக); <u>(மேல் நோக்கால் நான்காம்)</u>

AB = ங,
BC = க,
CD = ஞ,
DA = ச,

∴ (க = ங = ச = ஞ) ஆனபடியாலிங்கு ஷை 72·1242ரு = (க = ங = ச = ஞ) என்ற புஜங்கள் ஸமத்வமாயின :—

மற்றும் வருவன வெல்லா வற்றிற்கும் முன் [படம் 45 (−45)] க்குச் சொன்னதையும் இங்கு சொன்னதையும் நன்கு கவனித்துக் கொள்க:—

(புஜம் 5) = 5^4



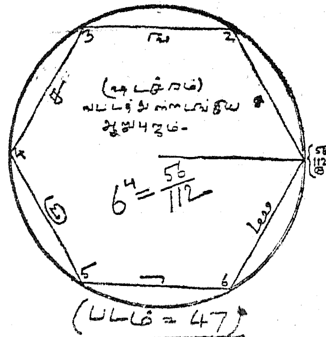
(படம் 46)ஐக் கவனி.

$$\left(\frac{180^\circ}{5^4}\right) = 36^\circ;$$ (36° ஜ்யா) = 0·5878

(·5878 × 112) = (65·8336) = க = ங = ச = ஞ = ட

(இங்கிஷ்ட த்ரிபுஜங்கள் 5 ∴ 180°ஐ 5ல் வகுக்க 36° வந்தது) மற்ற விவரம் மேல் பார்க்குக.

(புஜம் = 6) ரு′ = 6^4



(படம் 47)ஐக் கவனி.

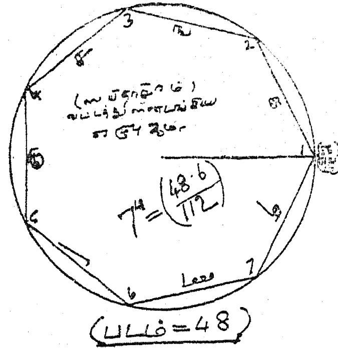
இஷ்டத்ரிபுஜம் 6 ∴ 180°ஐ 6ல் வகுக்க ஈவு 30° மற்ற விமாம் கீழ் நோக்குக)

$\left(\frac{180°}{6^4}\right)$ 6 = 30°; (30° ஜ்யா) = (0·5000) (0·5 × 112)

= (56·0) = க = ங = ச = ஞ = ட = ண.

———

(புஜ = 7) ரு = 7^4



(படம் 48)ஐக் கவனி.

இஷ்டத்ரிபுஜமிதற்கு 7 ∴ 180°ஐ 7ல் வகுத்த ஈவு $(25\frac{5}{7})°$ = 25° 43′

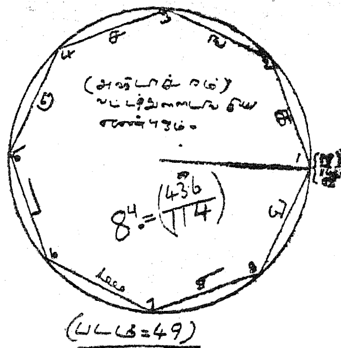
∴ $\left\{\frac{180°}{7^4}\right\}$ = $25\frac{5}{7}°$; ($25\frac{5}{7}°$ = 25° 43′) ஜ்யா = 0·434 . . . .

(·434 × 112) = (48·608)

∴ க = ங = ச = ஞ = ட = ண = த = 48·6.

———

(புஜம் = 8) ரு = 8^4



(படம் 49)ஐக் கவனி.

இதற்இஷ்ட த்ரிபுஜம் 8

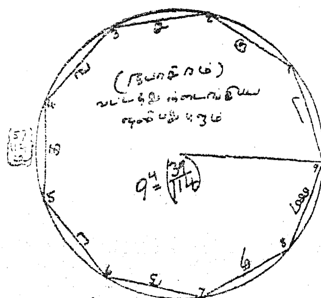
∴ 180°ஐ 8ல் வகுத்த ஈவு = $22\frac{1}{2}°$

$\therefore\left(\frac{180^\circ}{8^{4}}\right) = 22\frac{1}{2}^{c}$; ($22\frac{1}{2}^\circ$ ஜ்யா) = 0·3827

(·3827 × 114) = (43·6278)

∴ (க = ங = ச = ஞ = ட = ண த = ந):—

(புஜம் = 9)ஞு = 9^{4}



(படம் = 50)

(படம் **50**)ஐக் கவனி-

இவற்கிஷ்டத்ரி புஜம் = 9

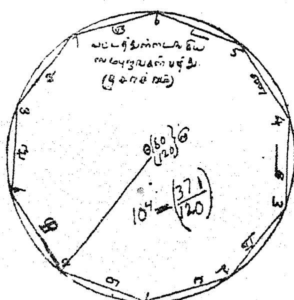
∴ 180°ஐ 9ஆல் வகுத்த ஈவு 20°,

$\therefore\left(\frac{180}{9^{4}}\right)^\circ = \mathbf{20^\circ}$.

(20° ஜ்யா) = 0·342

(0·342 × 114) = **38·988′** = {(க = ங = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப)

(புஜம் = **10**)ஞு



(படம் = 51)

(படம் **51**)ஐக் கவனி.

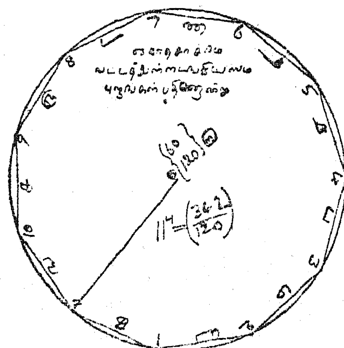
இதற்கிஷ்டத்ரி புஜ = (10^{4}) ∴ $\left\{\frac{180^\circ}{10^{4}}\right\}$ = **18°** ∴

(18° ஜ்யா) = (0·309);

(·309 × 60 × 2) = **37·08**

∴ க = ங = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப = ம = **37·08**;

(இங்கு இஷ்ட புஜம் = **11**) ரு = **11**ᐤ



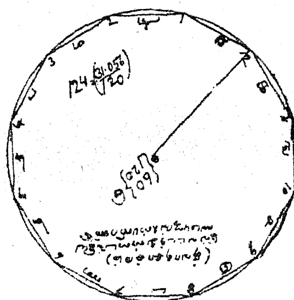
(படம் **52**)ஐக் கவனி.

இகிஷ்டத்ரி புஜ = 11ᐤ; ∴ $\left\{\frac{180°}{11^4 = 11}\right\} = \left(6\frac{6}{11} = 16°32'\frac{8}{11}\right)$

$\left\{\left(\text{ஜ்யா } 16°33' \text{ரு}\right) = \left(0{\cdot}2848\right)\right\} \left(60 \times 2\right)$

= 34·176 ∴ க = ங = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப = ம = ய = **34·176** ஆகும்.

(புஜம் = **12**) = **12**ᐤ



(படம் **53**)ஐக் கவனி.

இதற்கிஷ்டதிரி புஜம் = 12ᐤ

$\therefore \left(\frac{180°}{12^4}\right) = \mathbf{15°}$

$\therefore \left\{\left(\text{ஜ்யா } 15° = 0{\cdot}2588\right)\left(60 \times 2\right)\right\} = \mathbf{31{\cdot}056}$

∴ புஜங்கள் = க = ங = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப = ம = ய = ர = **31·056 ;**

(மற்றும் வந்தவைகட்கு இவ்விதமேகண்டு கொள்க)

விசேஷக்குறிப்பு:— இவ்வட்டத்தையும் இதைச் சார்ந்துள்ள புஜரேகைகளையும் நன்குற்று நோக்க ஏற்படுவது :—

வட்டத்தின் சுமார் நூறிலோர் பங்கு ($\frac{1}{100}$) பார்வைக்கு வக்ரமில்லாத நேர் ரேகையாகவே இருக்கும்.

ஆகையால் முதியோர்களும், வட்டத்தின் தொண்ணூற்றாறிலோர் பங்கு (அதாவது $\frac{1}{96}$) கேவலம் சீட்ச்சி (நீண்ட)ஸரல ரேகையாகவே தெரியும் என்கிறார்கள்:—

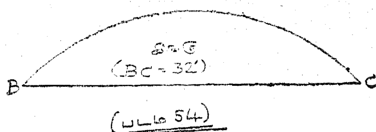
இதற்கு மேற்கோள் :—

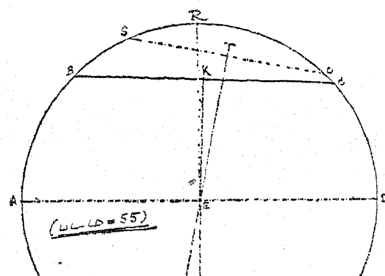
["வ்ருத்தஸ்ய ஷண்ணவத்யம் ச: தண்ட வத்ருச்ய தே து ஸ:"]

எனச்சூரியன், பிர்ம்மா, வ்யாஸர், காசிபர் முதலியோர்களின் வாக்யமுமாம்:—

இவ்விதம் வட்ட ஓரபுஜங்கள் எவ்வளவுக் கெவ்வளவு அதிகம் ஆகுமோ அவ்வளவுக் கவ்வளவு வட்டச் சமீபத்திலேயே ஆகும். எண்ணிலா புஜங்களாகில் இவைகள் வட்ட ரேகையிலேயே வித்யாஸமின்றி (வட்ட ரேகையாகவே) உருவம் உள்ளதாகும். ஆகையால் இவ்வித வெகு புஜங்கட்கும் வட்டத்துக்கும் வித்யாஸமே இல்லை. (இவ்வனந்த) இவ்வித வெகுபுஜக் காரணங்களைக்கொண்டே (த்ரிகோண மிதி விகிதப்படிக்கும் $\left(\pi = \frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}}\right)$ க்குச்சம எண்களின் = ($\pi = 3{\cdot}1415926535897932 \cdots \rightarrow$) என்பது மேற்படுகின்றதைக் கவனிக்குக:—

இங்கு படம் 54, 55 று விவரணம்:—





(படம் **54, 55**)ஐக் கவனி.

(BC) என்கிற நாண் நீளம் = **32,**

(இங்கு BC என்கிற வில் நீளம் தெரிய வேண்டிய அவசியமுமில்லை.)

ஷை (BC) வில் நாண்களாக அமைந்த ஓர் ஸமவட்டத்துண்ட க்ஷேத்ரத்தின் விசாலக்குழி (பரப்பளவு) என்ன:—

என்றால் இங்கு BC வில்கேந்த்ர வட்டத்துண்டப் பரப்பளவு தெரிய வேண்டியது அவசியமாகின்றது.

சுத்தமாக இதைக் கணனம் செய்யும்வழி:—

முதலில் BCவில் நாண் வட்டத்துண்டத்திலிருந்து (⊙ ABSOCDL) என்ற வட்டமும், இதனுடைய விட்டமும் (மய்யமும்) தயார் செய்துகொண்டு பின்பு இவைகளில் இருந்து க்ஷே BC க்ஷேத்ர விசாலங்கணிக்கவேண்டியது.

இதற்குவிவரம்:—

இனி சொல்லப் புகுவதற்கெல்லாம் படம் 54லிலிருந்தும் இதனால் ஏற்பட்ட படம் 55லிருந்தும் ஏற்படும் உருவம் எழுத்தடையாளம் இவைகளை எல்லாம் நன்கு கவனிக்குக:—

முதலில் BC என்ற நாண் (நேர்) ரேகையைப் பாதிசெய்: அதனால் (K) என்ற BCன்பாதி (KB = KC) என்று வரும் இந்த. (K) என்கிற ஸ்தானத்தில் உள் நோக்கி நேர்லம்பமாக (90°ல்) இருக்கும்படி நீண்ட கோடொன்றிழு.

பின்பு உன்னிஷ்டப்படி தெரிந்த அந்த BC வட்டத்துண்டதுள் (SO) என்ற கோடுவரை. இதையும் பாதிசெய்ய (ST=TO) என்ற (SO)வின் பாதி நீளம் வரும். இதிலும் முன்போல் (T) என்ற ஸ்தானத்தில் நேர் செங்குத்துக்கோடு (90ல் லம்பமாகும்படி) முன்செங்குத்துக் கோட்டைத்தாண்டும்வரையிலிழு.

இவ்விதமிருகோடுகளுமிழுத்ததால் இவ்விருகோடுகளும் ஒரிடத்தில் சம்பந்தித்தேதீரும். இப்படிச்சம்பந்தமிடத்திற்கே (E) என்ற மய்யம் (அதாவது BC என்கிற வட்டத்துண்டத்துக்குறிய ஸம்பூர்ண வட்டத்துடைய நடு மய்யம் = மத்தியம்) அவசியமேற்படும்.

பிறகு (EB = ES = EO = EC) என்றபடி அந்தச்சம்பூர்ண வட்டத்தினுடைய அறைவிட்டம் வரும். பின்பு க்ஷே (½விட்ட) வியாஸார்த்தப்படி கைவாரத்தால் (பப்பாஸினால்) ⊙BSOCDLAB என்ற ஸம்பூர்ண வட்டம் வரைக. [இதைச் சுகத்தின் பொருட்டு இஷ்டப்படி (AD) வியாஸார்த்தமுள்ள அறை வட்டமாகவுஞ் செய்துகொள்ளலாம்.] இங்கு AE=ED. என்பது.

AD = வட்டத்தின்விட்டம், (ED = EA) = அறைவிட்டமுமாகும்.

(பின்பு = AE = EB = ES = EO = EC = ED) இவைகள் யாவும் வியாஸார்த்தமென்கிற அறைவிட்டத்துக்குச் சமத்வமாகவே ஆவது. படம் 55-ல், ஏற்பட்டபடி கவனிக்குக.—

பிறகு (BC⌓) என்ற வட்டத்துண்டமான வில் நாண் க்ஷேத்ருந்தர்க்கதமாகியக்குழியை (பரப்பை = இஷ்டவட்டத்துண்டத்தின் விசாலத்தை)க் கணிக்க:—

BC என்ற நாணை AD என்ற விட்டத்தால் வகு. வருமீவேஜ்யா (ஸைன்)-(அறைவிட்டம் 1 என்றபடிக் கேற்பட்ட அளவில்), இதனால் ஜ்யாதி (ஸைன் முதலிய) பதகப்படி (TABLES) ஜ்யா சாபம் அல்லது கோணம் தெரிந்துகொள்க. இப்படி வந்தஜ்யா கோணத்தின் பாகாதியால் 180° பாகையை வகு. இவ்வீவே BC என்றவில் நாண் போன்ற த்ரிபுஜ (த்ரிகோண) க்ஷேத்ரங்கள் பூர்ண வட்டத்துள்ளடங்கியது அத்தனை; என்பதைக் காட்டும். இதையே (பெருக்குமெண் என்கிற) குணகம் எனக்கொள்.

அறைவிட்டவர்க்கத்தில் (BC)யின் பாதி (KCயின்) வர்க்கத்தைக்கழித்து மூலி இம்மூலமே EKயின் நீளமாகும்.

BCன் பாதியால் ஷை EKஐப் பெருக்கியதை யறுபடி குணகத்தாலும் பெருக்கு இதற்கோ கழியும் விசாலமெனப் பெயர். பின்பு முன் கூறியபடி இதற்கேற்படும் (πR^2 ஆகிய) இஷ்டப்பூர்ண வட்ட விசாலத்தில் ஷை கழியும் விசாலத்தைக்கழி மிச்சத்தை ஷை குணகத்திறைல் வகு. ஈவே. இஷ்டமாய்த் தெரியவேண்டிய BC என்ற வில் நாண் வட்டத்துண்ட க்ஷேத்ரார்த்தமாகிய பரப்பினளவு; அல்லது விசாலக்குழியாம்.

இதன் ஸ்மீகாணம்:— உதாரணமும்:—

(BC⌓) க்ஷேத்ரவிசாலக்குழி கணிக்கச் சமீகரணம்:—

= (அதாவது பொதுஸூத்திரம்).

BC, SO என்கிற இருநேர்க் கோடுகளின் பாதியால் (K·T) ஸ்தானத்தில் நேர்லம்பமாகச் செங்குத்துக்கோடுகள் (KE, TE) அதாவது ($\angle$CKE, $\angle$OTE) படத்திற் காட்டியபடிக்கும் மேலே பொதுவழியில் கூறிய படிக்கும் நன்கு கவனித்து E மய்ய கேந்திரம் (ஸென்டரல்) ஏற்படுத்திக்கொள்.

பின்பு:—

(EK)ஐ, அளந்துக் கொண்டாலும் நீளமேற்படும். அல்லது

$$(EK) = \sqrt{(ED^2 - KC^2)} = \sqrt{(ED + KC)(ED - KC)}.$$

$BC \times \frac{1}{2} = BK = KC;\ SO \times \frac{1}{2} = ST = TO;\ \frac{1}{2}AD = AE = ED$' என்பவைகளை முன் பொதுவிதியிலேயே கூறப்பட்டிருக்கின்றது.

$$\because\ AE = ED = EC = EO = ES = EB = EA.$$

$$\therefore\ EK = \sqrt{(EC^2 - KC^2)} = \sqrt{(EB^2 - BK^2)}$$

(ஸைன்) ஜ்யா $\angle KEC = \dfrac{KC}{EC} = \dfrac{BK}{EB} = \dfrac{BC}{AD}$.

அல்லது.

[டான்ஜன்ட் = ஸ்பர்சரேகா ($\angle$KEC)] = $\dfrac{KC}{KE}$ என்றுமாகும்.

முக்கியக்குறிப்பு:—

$\angle KEC = \angle E = E^\circ$ என்பதாயுணர் ∴

கு = குணகம் = $\left\{\dfrac{(180)^\circ}{(E)^\circ}\right\}$.

$\left\{\begin{array}{c}-(\text{கழியும் விசாலக்குழி})\\ = (\text{க. வி. குழி})\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} = \text{கு} \times \frac{1}{2}\ BC \times KE \\ \dfrac{\text{குணகம்} \times BC \times KE}{2}. \end{array}\right\} = (-\ \text{க. கு}).$

பின்பு:—

$$\left\{\begin{matrix}(\frown BC)\ \text{காணிவில் க்ஷேத்ர} \\ (\text{விசாலக்குழி})\ \text{பரப்பு,}\end{matrix}\right\} = \left\{\frac{\pi (EC)^2 - (\text{க}\cdot\text{கு})}{\text{கு} = \text{குணகம்}}\right\}$$ என்பதாம்.

இதற்கு உதாஹரண மிங்கு:—

($\frown$BC)க் குறிய குழியைக் கணிக்க:—

BC = 32, இதன் பாதி KC = BK = 16,

SO = 24, இதன் பாதி OT = TS = 12,

பின்பு பொதுவிதி ஸூத்ர விதிகளின் படிச் செய்து ஏற்பட்ட:—

($\frown$BC) வில் காண் வட்டத்துண்ட க்ஷேத்ரஸம்பூர்ண ($\odot$ ABSOCDL A) வட்டத்தின் விட்டமாகிய வியாஸம் = AD = 44,

இதன்பாதி AE = ED = $(\frac{1}{2} \times 44) = 22$:—

என்ற உபகாணங்களை முதலில் தெரிந்தகொண்ட பின்பு:—

(SIN) ஜ்யா $\angle\ E^\circ = \frac{32}{44} = \frac{16}{32} = (8 \times \frac{1}{11}) = 0.7273$.

இதற்குறிய கோணம் ஜ்யாபதகப்படி $E^\circ = 46^\circ\ 40' = (46\frac{2}{3})^\circ$

அல்லது $KE = \left\{(22^2 - 16^2)\right\}^{\frac{1}{2}} = (484 - 256)^{\frac{1}{2}} = (228)^{\frac{1}{2}}$

$= \left\{(22+16)(22-16) = (38 \times 6) = (228)\right\}^{\frac{1}{2}} = 15\cdot1$

[ஷை $\sqrt{(228)}$ன் மூலம் = 15·1] என்பதாம்.

(டான்) ஸபர்சரேகா $E^\circ = \left(\frac{16}{15\cdot1}\right) = \frac{160}{151} = 1\cdot06$ ரு

ஸ்பர்சரேகா படம் பார்க்க ஏற்பட்ட தான $E^\circ = 46^\circ\ 40' = (46\frac{2}{3})^\circ$ என்றுமாகும்.

இந்த $\angle E^\circ$ ஸாதனம் இஷ்டம் போல் செய்யலாம்.—

பின்பு:—

$$\left\{\frac{180}{E = 46\frac{2}{3}}\right\}^0 = \left(\frac{180 \times 60}{46 \times 60 + 40}\right) = \left(\frac{10800}{2800}\right) = \frac{108}{28} = \frac{27}{7}$$

$= 3\cdot857\frac{1}{7}$ = கு. குணகம் $= 3\cdot858\frac{1}{7}$ அல்லது 3·8571:—

$$\frac{BC}{2} \times (KC = KB) = \left(\frac{BC \times KE}{2}\right) = \frac{1}{2}\ BC \times KE$$

= (16 × 15.1) = 241·6 ஐ ஷை 3·5871உம் பெருக்கிய

= (241·6 × 3·587.) = (க·கு) = (931·8512)

= கழியும் விசாலக்குழி = க·வி·கு = (க·கு)

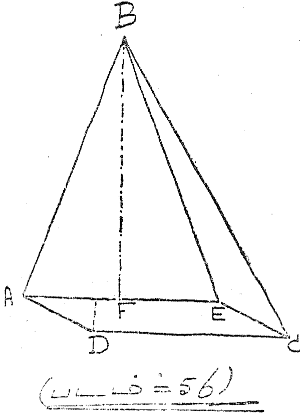
முன்சொன்னபடி அரைவிட்டம் 22க்குக்குழி (பரப்பு) = $\pi\ R^2 = 3\cdot1416 \times 22 \times 22 = \mathbf{1520\cdot5344}$.

$(1520 \cdot 5344 - 931 \cdot 8512) = 588 \cdot 6832$. இதே இஷ்டமாகிய ($\frown$ BC) வட்டத்துண்ட க்ஷேத்ரவிசாலக்குழியாம்.

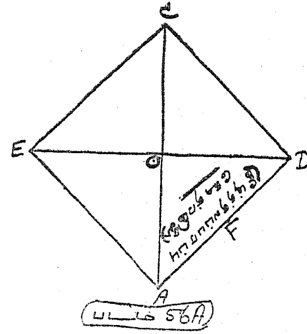
(குழி $\frown$ BC) ரு $= 588 \cdot 6832 = 589$. என்பதுணர்க:—

(வேறு) :—

(படம் 56, 56-A)ஐக் கவ்னி



(படம் = 56)



(படம் 56A)

படம் (56), (56A).க்களின் விவரணம்:—

56ம்படம் சதுரக்கூர் க்ஷேத்ரம். இதனடிப்பாகம் சமச்சதுரமு [படம் 56ல் கண்ட ($\square$AECD)ஐ; படம் 56 Aல் ($\square$AECD) என்னும் சதுரமாகவே நினை] ம் நுனியில் புள்ளி உருவமுமாம். ஆகவே இன்னுனிப்புள்ளியும் ஓர் மூலைதான். இவ்விதச் சதுர க்ஷேத்ரமூலை (பிந்துக்கள்) ப்புள்ளிகள் ஐந்து (5) ஆகும்.

இவ்வித க்ஷேத்ர உருவங்களில்:—

$$AD = DC = CE = EA = 6;\ FB = 8;\ \therefore AF = FE = \tfrac{6}{2} = 3.$$

$$\therefore AB = DB = CB = EB = \left\{(FE)^2 + (FB)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$= (8^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (73)^{\frac{1}{2}} = 8 \cdot 544.$$

$$\text{நாலு மேல்தலப்பரப்பு} = 4\left(\frac{AE \times FB}{2}\right) = 2\ AE \times FB$$

$$= (\text{மே.ப}) = 2 \times 6 \times 8 = 96 \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ஷை நாலு மேல்தலப்பரப்போடு பூமியில் கவிழ்ந்து படிந்திருக்கும் அடிப்பரப்பும் சேர்ந்தால் மொத்தம் (இந்த க்ஷேத்ரத்துக்கு மாத்திரம்) ஐந்தலப்பரப்பாம்.

கணிதத்தால்

இந்த ஐந்தலப்பரப்பு

$$= \left\{4\left(\frac{AE \times FB}{2}\right)\right\}$$

$$+ \left\{\begin{matrix} AE \times AD = AE^2 = EC = CD^2 = DA^2 \\ = (\text{கீ. ப}) \end{matrix}\right\}.$$

ஷை ரு = (மே· ப + கீ· ப). = (6^2 + ஷை 96) $= 36 + 96 = 132$.—(2).

குறிப்பு = படம் 56 Aல் கண்ட மத்தியமமான ⊙ இது (AECD □) ன் கர்ப்ப ஸ்தானம். இந்த ⊙ல் இருந்து (படம் 56ல்) கண்ட உச்சிப்புள்ளி Bக்குச் செல்லும் செங்குத்துத்கோடே கற்பச் செங்குத்துக்கோடு (இதற்கு = ⊙B), மற்ற-FB-பக்க மத்திச் செங்குத்துக்கோடு என்பதுணர்க:—

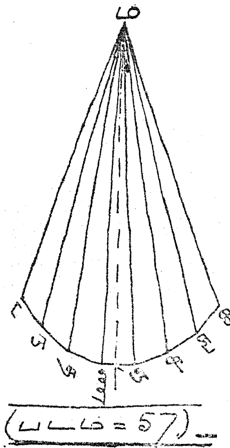
இது ஸமசதுரம் ஆகையால்:—

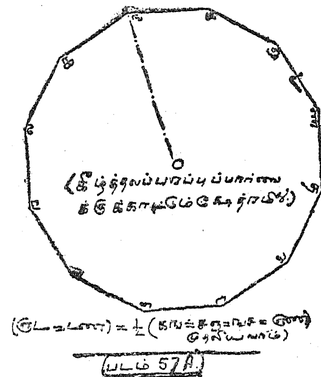
(ஷை க்ஷேத்திரகனபரிமாணம்) = $\frac{1}{3}$ (செங்குத்துக்கோடு × அகலம் × நீளம்).

என்பது........(3)

ஷை கற்பச்செங்குத்துக்கோடு $=(AB^2 — A⊙^2)^{\frac{1}{2}}$ என்பதாம்:—

(படம் 57, 57-A)ஐக் கவனி.


(படம் = 57)


(கீழ்த்தலப்பரப்புப்பார்வை த்ரிகோணமேக்ஷேத்ரமில்)
(ருடைடணை) = ½ (கங்க்ஷதளங்க ஞோ தெரியவாம்)
(படம் 57A)

படங்கள் (57), (57A)க்களின் விவரணமிங்கே:—

இது "இஷ்டபுஜககூர்" க்ஷேத்ரம்.

இதன்மேல் தலங்களின் பரப்பு=(இ.பு.மே.த.ப) படம் (57.ஐப் போலவும்.

அடித்தலப்பரப்பு = (இ. பு. அ. த. ப.) படம் (57A) ஐப்போலவும் (ஆக இரண்டு தலப்பரப்பும் ஒன்றாகச் சேர்ந்து) இருக்கும். [இத்தவித இஷ்டபுஜ க்ஷேத்ரத்துக்குறிய அடித்தலப்பரப் பின்உருவம் பற்றி படங்கள் (—45 முதல் 53 வரைக்குமுள்ள) முப்புஜாதி பனிரண்டு புஜங்கள் வரையில் உள்ள வட்டத்துள் ளடங்கிய இஷ்டபுஜ க்ஷேத்ர ரூபங்களைப் பார்க்க விவரம் நன்கு விளங்கும்] இதற்கும் நுனியில் (ம) என்கிற ஸ்தானத்தில் புள்ளி உருவ மானமூலை தான். ஆகவே இவ்வித இஷ்டபுஜ க்ஷேத்ரங்களுக்கெல்லாம் ஏற்படும்மூலைகள் (1 + இஷ்ட புஜ ஸங்கிமூலைகள், ஆகிய பிந்துக்களாம்.

(இப்புஜஸந்தி மூலைகளும் இதற்குறிய கர்ப்ப கேந்திரத்திலிருந்தேற்படும் வட்டத்தின் ரேகை மேலேயேதான் இருக்கும்.)

படம் (57, 57A) —ல் இஷ்டபுஜங்கள் (12) என்பதாகும்.

இதைவிட இஷ்டபுஜங்கள் 3 முதல் நம்மிஷ்டப் படிக்கமேதம் ஷை 12க்குப் பதிலாக (வட்டஒர) புஜங்களின் எண்கள் உள்ளனவாக அமைக்கலாம், அவசியம் இவ்விதஉருவங்களுமேற்படக்கூடும்.

கவனிக்கவேண்டிய சில குறிப்புகள்:—

இஷ்ட புஜ எண்களின் = (இ. பு. எ) (1).

(கங = ஙச = சஞ = ஞண) முதலிய (சரி) சமான இஷ்டபுஜ நீள ரேகைகளின் = (இ. பு. நீ) (2).

(மக = மங = மச = மஞ = மண) முதலிய புஜஸந்தி (புஜ ஆதி அல்லது புஜக்கோடி) யிலிருந்து உச்சிப்புள்ளி (ம)வுக்குச்
சாய்ந்திருக்கும் நீளம் (சா. நீ) (3).

மேல் தலப்பரப்பில் இஷ்ட புஜப் பாதியிலிருந்து உச்சிப்புள்ளிக்குச் சாய்ந்த நீளக்கோடு = (மட) = (மே. த. செ. நீ) = மேல்தலச் செங்குத்துக் கோடு நீளம் (3A).

இஷ்ட புஜ நீளப்பாதியின் = $\frac{1}{2}$ (இ. பு. நீ) (4).

இஷ்டபுஜப் பாதியிலிருந்து உச்சிப்புள்ளிக்குச் செல்லும் மேல் தலப்பரப்பில் ஏற்படுங் கோடு நீளம் = (இ. பு. ம. செ. நீ) (5).

(நெம்பர் 3Aம் 5ம்) ஒன்றையே குறிப்பது நன்கு ஏற்படுவதற்காக:—

Oங = Oக = Oச = Oண) முதலிய நீளப்பக்க புஜம் சமானமே.

(கங = ஙச = சஞ = ஞண) முதலியளவும் சமானமே = (இ. பு)

(ஞட = ட·ண) = ($\frac{1}{2}$· இ. பு.) (6).

என்றுமிதற்கு = $\frac{1}{2}$ (ணத = தக = கங = ஙச = சஞ = யர = ரல = லக) முதலியவுமுணர்க.

குறிப்புகள் சில கவனிக்க வேண்டியவைகள்:—

இஷ்டபுஜ எண்களின் = (இ. பு. எ); (கங = ஙச = சஞ = ஞண = ணத = தக) முதலிய (சரி) சமான புஜங்களின் நீளம் = (இ. பு. நீ);

[க்ஷேத்ரக்குழி கனம் முதலிய ஸா(நூ)தன விவரணம்].—

இஷ்ட புஜ உச்சிப்புள்ளி உருவ க்ஷேத்ரத்துக்குறிய:—

[மேல் (சாய்வு) தலப் பரப்பின்]

$$= \frac{1}{2} \left[(\text{சா·நீ})^2 - \left(\frac{\text{இ. பு. நீ}}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times [(\text{இ.பு.நீ})\ (\text{இ.பு.எ})] = (\text{மே.சா.த.ப}) \quad (1)$$

[இதன் பூமித் தலப் பரப்பின்]

$$= \frac{1}{2} \left\{ (\text{Oங})^2 - \left(\frac{\text{இ. பு. நீ}}{2}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \text{இ. பு. எ.} \right\}$$
= (இ. பூ. த. ப) (2).

[இதன் மொத்தத் தலப் பரப்பின்] = [மே. சா. த. ப) + (இ. பூ. த. ப)]...(3).

படம் 57Aல் கண்ட கீழ் தலப்பரப்பின் மத்தியில் உள்ள பிந்து சூசக எழுத்து (O) ஸ்தானம் இஷ்ட புஜ உச்சிப்புள்ளிஉருவக்ஷேத்ர கர்ப்ப (மத்ய) கேந்திர பிந்து (புள்ளி) ஆகும்.

(இந்த கர்ப கேந்திரப் புள்ளியில் இருந்து உச்சிப் புள்ளிக்குச் செல்லும் செங்குத் துயரக் கோடு நீளம்).

$$= (O\ ம) = (கர்ப்ப\ உச்சிக்\ கோடு) = (க'உ)$$

$$= \left\{ (சா.நீ)^2 - (O\ ங)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (O\ ம) \quad (4).$$

$$(O\ ங = O\ ல = O\ க\ முதலியவின்) = \left\{ (சா.நீ)^2 - (O\ ம)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5).$$

$$(இதன்\ கன\ பரிமாணம்) = \frac{1}{3} \left\{ (இ.\ பூ.\ த.\ ப)\ (O\ ம) \right\}. \quad (6).$$

என்பதாம்:—

(இதர விதத்தில் எற்படும் சகல சந்தேக நிவாரணத்துக்கும் படம் 57, 57Aஐ நன்கு கவனிக்குக).—

மற்றும்இவ்விதம் வருவனவெல்லாம் இந்தப் படிக்குச் சாதனஞ் செய்துக் கொள்ள வேண்டியதாம்.

விசேஷக் குறிப்புகள்:—

(இ. பு. எ) எவ்வளவுக் கெவ்வளவு அதிகரிக்கின்றதோ அவ்வளவுக்கவ்வளவு (இ. பு. நீ) மிக்சமிக்கக் குறைந்து வக்ராகார ரேகையாகிக் கடைசியில் இது வட்ட ரேகையாக(வட்டமாகவே)யாகும்:— (என்கிற விவாதத்தை நன்கு தெரிந்துகொள்ள வேண்டியதற்காகப் படங்கள் (— 45 முதல் 53 வரையிலுள்ள) முட்புஜாதிப்பன்னிரண்டு புஜங்கள் பரியந்தமுள்ள வட்டத்தைத்தொடும் இஷ்டபுஜாந்தம் அல்லது இஷ்ட புஜாதியுடைய க்ஷேத்ரங்களை நன்கு கவனிக்குக:—)

இவ்விதம் கீழ்த்தலப்பரப்பு மாறுபாடடைவதால் ஸமக்ஷேத்ரவட்டங்களும், மேல்தல ஒரப்பரப்பு மாறுபடுவதால் கூறுருவே க்ஷேத்ரங்களும், எற்படுகின்றன:—

[இவ்வித க்ஷேத்ரங்களை (சமக்ஷேத்ர வட்டத்துக்கு) படம் 1-3-4ம், (கூறுருவை க்ஷேத்ரத்துக்கு) படம் 9ஐயும் பார்க்க நன்கு விளங்கும்]

மேலும் இதைவிட பக்கம்(114ல்) சொன்னபடி இஷ்டபுஜம் 45க்குச் சொன்ன குணகத்தால் வட்டத்துள்ளேற்படும் 45 புஜத்தையும் க்ஷேத்ரம் செய்து பார்த்தால் இதன் வாஸ்தவம் இன்னும் நன்கு விளங்கும்:—

அமித (வெகு அதிகரித்த) த்ரி புஜஸந்திப்பால் வட்டமும் இந்த புஜங்களும் வித்யாஸமே இன்றியிருப்பதும் புலப்படும்:—

இவ்வித க்ஷேத்ரக் கீழ்தலப்பரப்பு கணிக்கும் உதாஹாரணத்தை படம் 55ன் (க. கு. = கழியும் விசாலக்குழி) என்பதைக்கணிக்கும் விவாணத்தில் பார்க்கவும்— மற்றமேல்தலப்பரப்பு கணிக்கும் உதாஹாரணம் படம் **56ன்** **விவாணத்தில்** பார்க்கவும்.—

அதுபோல இதைச் செய்ய வேண்டும் என்பதே யொழிய புஜாதி க்ஷேத்ரக ணிதம் வெகு வித்யாஸம் என்பதையும் மனதில் நிருத்தி **கணி**த வேலை செய்ய விடை சரிவரும்.—

மற்றுமேற்படுவதற்கெல்லாமிவ்விதமே கண்டு கொள்ள வேண்டியதாகும்: என்பதாம்:—

(வேறு)

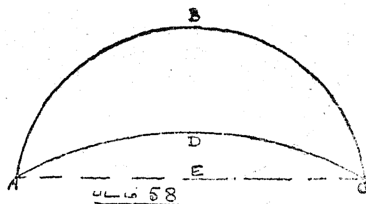
படம் 58, 59, 60 இவைகளின் விளக்கப் பொது விதியிங்கு:—

இவைகளின் ஸாதனத்துக்கு முதன் முதலில் படம் 54, 55ஐயும் இவற்றின் ஸாதகப் பொதுவிதி முதலிய உதாஹரணம் உருவமிவைகளையும் நன்குகவனிக்க:—

இவ்வுரு முதலிய ஸாதகங்களும் ஏற்படும்.

பின்பு:—

இங்கு

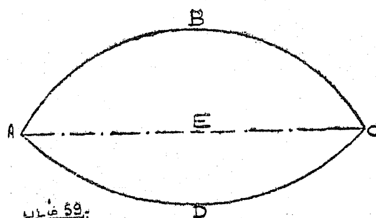


(படம் 58)

$$\left\{ \begin{matrix} \frown \text{ABCD என்கிற} \\ \text{க்ஷேத்ர வட்டத்துண்டச்குழி} \end{matrix} \right\} = \left\{ \frown(\text{ABCE குழி}) - (\frown \text{ADCE குழி}) \right\} \quad (1).$$

இச்சமீகாணம் படம் 58ரு ஆகும்.—

இங்கு:—



(படம் 59)

{(⬭ABCD என்கிற க்ஷேத்ர வட்டத்துண்டக் குழி ரு)}

= {(⌓ABCE குழி)+(⌓ADCE குழி)} ...... 2.

இச்சமீகரணம் படம் 59ரு ஆகும்.—

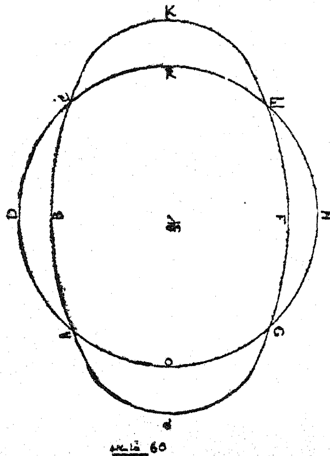
எப்போ இப்படத்தில் கண்ட AE = EC, DE = EB என்றுருகுமோ தற்சமயமெல்லாம்.

(க்ஷே⬭ABCD குழிரு).
= (⌓ABCE குழி) × 2 = (2 × ⌓ADCE) என்றுமாம்.

மற்றும்வருவன இவ்விதமே.—

இப்போது இங்கு:—

படம் **60**ஐ முதலில் நன்றாகக் கவனிக்க வேண்டும் பின்பு:—



(படம் ௬0)

⊙ ADCREHGO என்கிறது ஸமவட்டமும்,

⊙ ABCKEFGP என்கிறது நீள் (நீண்ட) வட்டமுமாகும்.

இவ்விரு வட்டத்தையும் ஒன்றாய் பதிப்பித்திருக்கின்றதாகப் பாவிக்குக:—

அப்போ.—

படம் (58)ருச் சொன்ன விசாலக் குழி கணிதப்படி இங்கும் கணிக்கப் பட்ட:—
(வெளி வட்டத் துண்ட க்ஷேத்ரக் குழிகளின் சேர்க்கை.)
= (குழி ABCD + குழி CREK + குழி EFGH + குழி GOAP).
என்பதாகும்,—

(மேலுமிவைகட்குட்பட்ட ⊙ABCREFGOA க்ஷேத்ரக் குழிரு)
= (நீள்வட்டக்குழி − GOAP குழி − CREK குழி).∴

(க்ஷே.ருச் சமம் =) =(ஸமவட்டக் குழி − ABCD குழி − EFGH குழி);
...... (3).

என்றுமாகும்.—

∵ (⊙ ADCKEHGPA குழிரு)

= (ஸமவட்டக்குழி + GOAP குழி + CREK குழி)

= {(நீள்வட்டக் குழி) + (ABCD குழி) + (EFGH குழி)} . . . (4).

என்றுமாகும்

மேலுமிதில்:— ஆவது.

(ஷ நேர்ரேகைகளில்):— CG = AE, B के = के F, O के = R के. FH=DB, OP=RK என்பவைகளினுடைய ரேகாஸமத்வங்கள் கவனிக்கத்தக்கது இவ்வித க்ஷேத்ரங்களில் ஷ ஸ்தான ரேகைகள் ஷ காட்டிய ஸமத்வத்துக்கு வெகுவாக வித்யாஸத்திலு மேற்படலாம். அப்போதும் அவ்வித க்ஷேத்ரவிசாலங் கணிக்க மேலே குறிப்பிடப்பட்ட ஸமீகாண வழியே உபயோகமாகும் என்பதின் பொருட்டே அச்சமீகாணங்களையும் இவ்விதமே எழுதப்பட்டது என்பது உணர்க.—

இனி வேறு விசேஷ விஷயங்கள்:—

அதாவது 115ம் பக்கத் துடர்ச்சியாகிய கோல கணித ஸம்பந்த மானவைகள்:-—

முதலில் இஷ்டபாகைக்கோ, இஷ்டகலைக்கோ, இஷ்டவிகலைக்கோ, இஷ்ட உப விகலைக்கோ (இ) என்கிற இஷ்டசாபங்கணிக்கவேண்டும். இவ்விஷ்டசாபத்தினல் தான் (SIN) ஸைன் (புஜஜ்யா) கோடிஜ்யா (S)SIN) கோஸைன் முதலியவைகள் கணிக்கமுடியும்). இவைகளைக்கொண்டே ஸ்பரிசரேகைகள் (டான்ஜென்ட்ஸ் = TANGENTS), கோடான்ஜென்ட்ஸ் = COTANGENTS) (ஸ்பக = SECANT), முதலியவுங்கணிக்கவேண்டுமாகையால்:—

(முதலில் அறிய வேண்டிய விஷயங்களாவன):—

கோலம் (வட்டம்) 1க்கு:—

ருசி = 12

ருசி 1க்கு.பாகம் = 30°	பாகம் (பாகைகள்) = 360°
பாகம் 1க்கு, கலை = 60′	கலை கலைகள் = 21600.′
கலை 1க்கு, விகலை = 60″	விகலைகள் = 1296000.″
விகலை 1க்கு, உபகவிகலை = 60‴	உபவிகலைகள் = 77760000‴.

கோலத்துக்குறிய வியாஸம் = 1 அரைவியாஸம் = 2; (இங்குவ்யாஸத்தைத் தான் விட்டம் என்னப்படுகின்றது.)

த்ரிகோணமிதிவிகிதகங்களாகிய மேசமேடிகல் டேபில்கள் (O-°TO-90-°,) அல்லது (-O-′ TO-5400′ அல்லது) (-O″ TO - ?24000″;) (இல்லையேல் (-O-‴TO-19440000-‴)இவ்வளவுவரையில் ஸாதனம் செய்யப்பட்டால்போதும். 360°-, 21600′, 1296000″, 77760000‴- இவைகளடங்கியவட்டம் பூராவும் ஸாதனம் செய்யவேண்டியதில்லை.

ஆகையால்:—

இவைகளின் ஸாதனத்துக்குக் குணகளண்வேண்டும்:— ஆனபடியால் இக் குணகஸாதனம்:—

இஷ்டமாகிய பாகை கலை விகலை உபவிகலைகளை இஷ்டஎண்களாகப்பாவித்தால் முறையே இவைகளின் ஹாரகங்களும் 180° - 10800′- 648000″- 38880000‴— என்பவைகளாம்—

ஆகையால் ப்ரதிஉபவிகலைகளுக்கும் இஷ்டசாபமாகிய (இ‴) கணிக்கவேண்டுமானல் (இஷ்டசாப உபவிகலைகலை இங்கு 0-‴1- ‴2 - ‴3 - ‴4 - ‴5 - ‴6 - ‴7‴ TO 19440000.‴ எனில் இவைகளுக்குச்சமம் இஷ்டஉபவிகலைகள் (இ) என்று கொண்டால்) இப்போ:—

$$(ஜ்யா\,இ'''\,ரு) = (3.1415926535897932) \times \left\{ \frac{\text{இஷ்டஉபகவிகலைகள்} = (I.TO.19440000)'''}{(38880000''')} \right\}$$

என்பதாகும்:— ——(1)

இஷ்ட சாபவிகலைகளுக்கு ஜ்யாதி ஸாதனங்கள் வேண்டின் இவைகட்குச்சமம் = 0″ — 1″ — 2″ — 3″ — 4″ — 5″ — 6″ — 7″ — 8″ — 9″—10″ to 324000″ ஆனல் இவைகளுக்குச் சமம் இஷ்டவிகலைகள் (இ) எனக் கொண்டால் இப்போது கணிக்க வேண்டிய.

$$(இ''\cdot ரு) = (3\cdot 1415926535897932) \left\{ \frac{(\text{இஷ்டவிகலைகள்}) = (1\text{-T }0\text{-}324000)''}{(648000'')} \right\}$$

என்பது.— ——(2)

இஷ்ட சாபகலைகளுக்கு ஜ்யா (இ) வேண்டியவை களாகில்:

0′ — 1′ — 2′ — 3′ — 4′ — 5′ — 6′ — 7′ — 8′ — 9′ — 10′ to 5400′ இவைகளை இஷ்ட கலைகளாகக் கொண்டால் தற்சமய மெல்லாம்கணிக்க வேண்டிய வைகளாகிய

$$(இ'.ரு) = (3.1415926535897932) \left\{ \frac{(\text{இஷ்டகலைகள்}) = (I\text{-TO-}5400'}{(10800')} \right\}$$

என்பது ——(3)

இஷ்டபாகைகளுக்கோ ஜ்யா (இ) வேண்டியதாகில்:— இங்கிஷ்டபாகைகளின் = 0° — 1° — 2° — 3° — 4° — 5° — 6° — 7° — 8° — 9° — 10°— 11° — to 90° ∴

$$\therefore (\text{இ}^\circ\text{-ரு}) = (3.14159265359) \left\{ \frac{\genfrac{}{}{0pt}{}{(\text{இஷ்டபாகைகள்})}{=(1^\circ\text{-TO}-90^\circ)}}{(180^\circ)} \right\}$$

என்பது ——(4)

இவ்விதம் இந்த (இ)கணித்தறிந்தபின்பு:—

$$(1), (\text{புஜஜ்யா}) = \text{இ} - \frac{\text{இ}^3}{\angle 3} + \frac{\text{இ}^5}{\angle 5} - \frac{\text{இ}^7}{\angle 7} + \frac{\text{இ}^9}{\angle 9} - \frac{\text{இ}^{11}}{\angle 11} + \frac{\text{இ}^{13}}{\angle 13} - + - + \rightarrow.$$

$$(2), (\text{கோடிஜ்யா}) = 1 - \frac{\text{இ}^2}{\angle 2} + \frac{\text{இ}^4}{\angle 4} - \frac{\text{இ}^6}{\angle 6} + \frac{\text{இ}^8}{\angle 8} - \frac{\text{இ}^{10}}{\angle 10} + \frac{\text{இ}^{12}}{\angle 12} - + - + \rightarrow$$

குறிப்பு:— ஷை $\because \angle 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$
ஷை $\because \angle 6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720.$

(மேன் மேலும் இவ்விதமே):—

என்பதாயுணர்க.—

$(-+\rightarrow.)$ முதலியவிகிதங்கள் 15,17,19,21,23, (14, 16, 18, 20, 22, 24,) இன்னும் மேன்மேலும் (இ) இதேகதியில் முடிவின்றி அமிதமாய்க்கணிக்க வேண்டியதைக்குறிக்கும். நமக்கு வேண்டியவரையில் கணித்துக்கொள்க:—

இவ்விதம் ஜ்யா கோஜ்யாக்கள் இஷ்டராசி பாக கலா விகலா பவிகலாதிகட்கு த்தெரிந்தபின்பு:—

(இங்கு அரைவிட்டம்) = (த்ரிஜ்யா = 1) = ஒன்று, எனக் கொண்டிருப்பதனல்.

$$\text{ஸ்பரிசரேகை} = \frac{\text{புஜஜ்யா}}{\text{கோடிஜ்யா}}; \quad (3)$$

$$\text{கோடிஸ்பரிசரேகைக்குச்} = \frac{\text{கோடிஜ்யா}}{\text{புஜஜ்யா}}; \quad (4)$$

$$\text{ஸ்பரிசகர்ணம்} = \frac{1}{\text{கோடிஜ்யா}}; \quad (5)$$

$$\text{கோடிஸ்பர்சகர்ணம்} = \frac{1}{\text{புஜஜ்யா}}; \quad (6)$$

வ்யுத்க்ரமஜ்யா = (1 — கோடிஜயா),

90° பாகைக்கு மேல் 180° பாகை வரையில்:—

வயுத்க்ரமஜயா = [(1) + ஜ்யா (புஜசாபம் — 90°)] (7)

கோடிவ்யுத்க்ரமஜ்யா = (1 — புஜஜ்யா); (8)

$$\text{ஜ்யோஜ்யாகர்ணம்} = \text{கார்டு} = (\text{CHORDS}) = \sqrt{(1 + \text{வ்யுஜ்யா}^2)} \quad (9)$$

(வ்யுஜ்யா = வ்யுத்க்ரமஜ்யா = உஜ்யா) என்றுஞ் சொல்வார்கள.

மேலே சொல்லப்பட்ட புஜஜ்யா ஸாதனத்துக்குச் சுலபமான மற்றோர் வழியுமுண்டு:—

ஜ்யாஸாதனம் இஷ்ட பாகைகளுக்கானல்:—

90^0ம் பாகஜ்யா = (த்ரிஜ்யா)வின் முதல் ஜ்யாவை ரட்டித்தது சேத்யகம்.

இதை எந்த இஷ்டபாகத்துக்குஜ்யா வேண்டுமோ இதன் முன்பாகஜ்யாவால் குணி; த்ரிஜ்யாவால்வகு, ஈவில் குணித்தஜ்யாவின் முன்பாகஜ்யாவைக்கழி. மிச்சமே இஷ்டபாகஜ்யா–ஆகும்:—

[(த்ரிஜ்யா எனறுல் த்ரிருசிஜ்யா என்பது) பூர்விகர்கள் த்ரிஜ்யாவை 3438′ என்கிறார்கள், சுலபத்துக்கு நவீனர்கள் த்ரிஜ்யா = 1 எனக்கொண்டார்கள். இதை அனுசரித்தே முன்னுரையிலும், ஜ்யாதிகளின் விகிதம் பதகம் தயார் செய்யப்பட்டிருக்கிறது] :—

இதற்கு உதாரணம்:—

சேத்யகம் = $2 \times \sqrt{(1 - 0{\cdot}01745 \times 0{\cdot}01745)}$ ப்ரதிபாகஜ்யா ஸாதனஞ் செய்ய:—

ஷி ரு = $(0{\cdot}9998 \times 2) = (1{\cdot}9996)$ = சேதயகம்.

ஜ்யா 2^0 ரு = (சேத்யகம் × ஜ்யா i ÷ 1) – (ஜ்யா 1^0) ரு.

$= (1{\cdot}9996 \times {\cdot}01745 \div 1 - {\cdot}0000) = {\cdot}0349 =$ (SIN 2^0)

ஜ்யா 3^0 ரு = (சேத்யகம் × ஜ்யா 2^0 ÷ 1) – (ஜ்யா 1^0) ரு

$= (1{\cdot}9996 \times {\cdot}0349 \div 1) - ({\cdot}01745) =$ SIN 3^0. $= {\cdot}05233$.

ஜ்யா 4^0 ரு (சேத்யகம் × ஜ்யா 3^0 ÷ 1) – (ஜ்யா 2^0). ரு

$$=\left(\frac{(1.9996}{1} \times 0{\cdot}05233 - 0.0349\right) = 0.06975 = \text{SIN } 4^0$$

ஜ்யா 5^0 ரு = [(சேத்யகம் × ஜ்யா 4^0 ÷ 1.)]ரு.

$=[(1.9996 \times 0.06975 \div 1)-(0.05233)]$ரு

$= 0.08715 =$ SIN 5^0.

என்றிவ்விதமேஒவ்வோர் பாகைகளுக்கும் சுலபத்தில்ஜ்யாஸாதனம் செய்துகொள்ளலாம்.

இவ்விதம் ஜ்யாக்கள்மாத்திரந் தெரிந்தவிடத்தில் கோடிஜ்யா ஸாதனம் செய்ய.—

கோடிஜ்யா = $\sqrt{[1-(\text{ஜ்யா} \times \text{ஜ்யா})]}$ என்றிப்படிக்கணிக்குக.

இவ்வழிப்படிக்குக் கலாதிகட்கும் ஜ்யாக்கள் ஸாதிக்கவேணுமாகில்;—

89° 59'க்கு (SIN) ஜ்யா = 0·99999996 என்றுவதால் இங்கு இதன்ரட்டி (1·99999992)ப்பே சேத்யாகம். இந்தப்ரதிகலே ஜ்யாஸாதக சேத்யகம் = 1·99999992). இதை சுமாரில் (2) எனக்கொள்ள; பெருக்கி வகுக்கும் எண்கள் அடிபடுவதால் கேவலம் பெருக்கப்படுமெண்ணிரட்டிப்பே நிற்கின்றது.

ஆகையால்:—

$$\left.\begin{array}{l}(\text{ரண்டாம் கலேஜ்யா} \\ = \text{SIN } 2')\end{array}\right\} = \left\{(\text{முதல் கலேஜ்யா} \times 2 - \text{ஜ்யா } 0')\right\}$$

$$(\text{ஜ்யா } 3' \text{ ரு}) = (\text{SIN}3') = \left\{(\text{ஜ்யா } 2' \times 2) - (\text{ஜ்யா}1')\right\}$$

$$(\text{ஜ்ய } 4' = \text{SIN } 4') \text{ ரு} = \left\{(\text{ஜ்யா } 3' \times 2) - (\text{ஜ்யா}2')\right\}$$

[என்றிவ்விதவழியாகும் இதுவும் 7ஸ்தானம் பரியந்தம் வெகுசுத்தம். இதற்கு மேலும், மிகசுத்தஜ்யா வேண்டுமேயாகில், முதல் பாகஜ்யாவை எத்தனை ஸ்தானம் சுத்தமாகக்கணித்து, இதன் கோஜ்யாரட்டிப்பு சேத்யகமும், எத்தனை ஸ்தானம் சுத்தமாக வருகிறதோ அத்தனை ஸ்தானங்களுக்கு கலாதி (அல்லது பாக) ஜ்யாவும் சுத்தமாகவே வரும் என்பதாம் :—

(இவ்விதமே — விகலா — உபவிகலாதி — களின் சுத்த ஜ்யா ஸாதனத்துக்குமாம்).]

என்றிவ்விதமாகையால்:—

ஜ்யா (SIN) வேண்டிய இஷ்டகலே முன் ஜ்யாவைரட்டிப்பதிலிதன் முன் ஜ்யாவைக்கழிக்க இஷ்டகலாதிகட்குரிய ஜ்யா; டெஸிமல் 7-ப்ளைஸ்வரையில் ஸரிவரும். விகலாதிகட்கோ வென்றால் சேத்யசானுஸாரமாக (9, 14-)ப்ளைஸ்வரையில் ஸரிவருமென்பதை முக்கிய அவசியமாயுணர்க:—

இவைகளே இங்கு முக்கிய ப்ரதான வழிகள். (மற்றவை இங்கவ்வளவசியமில்லே. என்பதால் விடுபட்டன)—

இந்தப்படி மேலே கூறிய ப்ராசீனபத்ததி வழிப்ரகாரம் ஏற்பட்ட ஸாரம் யாதெனில்:—

∵ ஓரிஷ்ட சாபாம்ச = A, மற்றோர் சாபம் = B, என்றால் :—

$$\left.\begin{array}{l}\text{ஜ்யா } (A + B) = 2 \text{ ஜ்யா } A. \text{ கோஜ்யா } B - \text{ஜ்யா } (A - B) \\ = \text{SIN } (A + B) = 2 \text{ SIN } \mathbf{A} \times \text{COSIN } \mathbf{B} - \text{SIN } (A - B)\end{array}\right\}$$

என்றதன் விலோமமாகிய, நவீன கணித ஸமீகரணத்துக்கு மூலமாகிய :—

$$\because \text{ஜ்யா } (A + B) = (\text{ஜ்யா } A. \text{ கோஜ்யா } B + \text{கோஜ்யா } A. \text{ ஜ்யா } B) \because$$

[" சாபயோ ரிஷ்டயோ: " எனக்கீழ்வரும்]:—

பாஸ்கார சார்ய பத்யாநுஸாரஸூத்ர மேற்பட்டதற்கும் மூலசாரண வழி, இதன் முன் உதாரணத்தில் காட்டப்பட்ட ரிஷகளின் பத்ததி, ஸூத்ரங்சமீகாணங் களேயாகும்; என்பது ஆழ்ந்த யோசனையால் உணரத்தக்கதாகும். வெகுப்புராதீன காலத்திய ஆர்ய பட்டறேவிட்டத்தை (20000) என்றும் இதன் பாதியறை விட்டத்தை (10000) என்றும் கணித சுலபத்தின் பொருட்டுக் கொண்டுள்ளார்.

இவறைப்பின்பற்றியேதான் நவீனரும் அறை விட்டத்தை (10000 = 1) பதிஞயிறத்துக்குபத்தில் ஒன்று எனக் கொண்டது.

இந்த அறைவிட்டம் 1க்குச் சாதனம் செய்த இஷ்டபாகாதி ஜ்யாக்களை இஷ்ட அறைவிட்டத்தின் பரிமாணத்தால் பெருக்கினுல் இஷ்ட வ்யாஸார்ந்த மாகிய அறை விட்டத்துக்குறிய கோலீய (வட்டச்சம்பந்தத்துக்குறிய) ஜ்யாதிகளாகும் :—

உதாரணமாகப் பூர்வீகர் (ஆர்பட்டர் தவிற) அறைவிட்டமாகிய வ்யாஸார்த் தச்சமம் = (3438)' என்று கொண்டிருந்தபடியால் இவர்கள் இஷ்டப்படி 30 பாகைக்கு ஜ்யா, வேணுமானுல் ∵ (SIN 30° × 3438) = 0. 5 × 3438 = 1719' என்பதாகும்.

மேலுமிவர்கள் இஷ்டப்படி, பசண கோல கலைகளின்.

= 21600' ரு = [(3438' × 6. 2832) இதன் கறர் =

= [(3437' — 44'' —48'') [2 × 3·14159265]

இதே எதற்கும் சாஸ்திரத்தை யனுசரித்தது :—என்பதாகும்.

இதற்குப் புறம்பானவைகள் சுலபத்திற்கு சௌகர்யப்படி ஏற்படுத்திக் கொள்ளப் பட்டது என்பது உணர்க :—

LAOORITHms (லாகாரிதுப்ஸ்) தெரிந்தால் இன்னுஞ் சுலபத்தில் ஸகல கணிதங்களையுங் கையானத்தகுமென்பது அவசியமுணர்க.

ஷைக்குச் சரியான விவரணமிங்கு.

இவ்விதம் ப்ராசீன பத்ததிப்படி எற்பட்ட வழியின் ஸாராம்சம் யாதெனில்:—

இஷ்ட இருவித சாபாம்சங்களை முறையே — அ — க — என்று கொள்ள:—

$$\therefore \left\{ \begin{aligned} \text{ஜ்யா} (\text{அ} + \text{க}) &= \frac{\text{ஜ்யா அ.கோஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} + \frac{\text{கோஜ்யா அ.ஜ்யா க};}{\text{த்ரிஜ்யா}} \quad (1) \\ \text{ஜ்யா} (\text{அ} - \text{க}) &= \frac{\text{ஜ்யா அ. கோஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} - \frac{\text{கோஜ்யா அ.ஜ்யா க};}{\text{த்ரிஜ்யா}} \quad (2) \end{aligned} \right\} \therefore$$

யோகாந்தா ஜ்யா ஸாதனத்திற்கு:—

" சாபயோரிஷ்டயோர்த்தோர்ஜ்யே
மித: கோடிஜ்யகாஹதே "
த்ரிஜ்யா பக்த்தே தயோரைக்யம்
தச்சாபைக்யஸ்ய தோர்ஜ்யகா
சாபாந்தரஸ்ய ஜீவாஸ்யாத்
தயோரந்தரஸம்மிதா " என்கிற

ஸ்ரீபாஸ்கராசார்ய வசனத்துக்கு (1, 2) ஆகிய ஆர்ஷ (ரிஷிகள் ஸம்பந்த) பத்ததிஸமீகாணமே மூலமாகும். இவ்விரண்டையும் ஆதாரமாகக் கொண்டு இவற்றை விலோகணிதப்படி யோகாந்தரஞ் செய்ய:—

(இங்கு த்ரிஜ்யா = 1 ∵) ∴

(3), ஜ்யா (அ + க) + (அ − க) = (2 ஜ்யா அ. கோஜ்யா க) ∴

இதையும் விலோம கணிதத்தால் கீழ் கண்டபடி செய்ய :—

(4), ஜ்யா (அ + க) = 2 ஜ்யா அ. கோஜ்யா க − ஜ்யா (அ − க) ∵

மகரிஷிகளோ த்ரிஜ்யாவை (1க்குப் பதிலாக) 3438', − 10000, − 120, − 3415, − என்றிவ்வித மெல்லாம் கொண்டிருக்கிறபடியால் ·—

(5);-ஜ்யா (அ + க) = $\left\{\frac{\text{2 ஜ்யா அ. கோஜ்ய க}}{\text{த்ரிஜ்யா}}\right\} - \left\{\text{ஜ்யா (அ−க)}\right\}$ இதில்

த்ரிஜ்யாவாகிய (**3438'**-ஏ) ஹாரகமாய மைந்தது. மகர்ஷிகள் வாக்யத்துக்கு:—

(குறிப்பு):— ஆகையால் இவ்வைந்தாம் வழியைவிட கணிதசுலபத்திற்காக —4ம் வழியைக் கொள்ளலாம், இவ்வித மேற்படும் ஜ்யாதிகளை இஷ்டவ்யாஸார்த்தங்களால் (3438, 10000, 1000, 100, 120 − 12 − 3415) (ஸ்ரீபதிஸம்மதவ்யாஸாத்தம் = **3415** என்பது) இவைகளால் பெருக்கிக் கொள்ள இஷ்ட வ்யாஸார்த்த ஜ்யாதிகளாகும்.

பத்யரூப வசநத்துக்கே ஆர்ஷஸமீகரணமாகிய :—

ஜ்யா (அ + க) = $\left\{\frac{\text{2 ஜ்யா அ. கோஜ்யா க}}{\text{(த்ரிஜ்யா)}}\right\} - \left\{\text{ஜ்யா (அ − க)}\right\}$

= $\left\{\frac{\text{(2 கோஜ்யா க × ஜ்யா அ)}}{\text{(த்ரிஜ்யா)}}\left\{\text{ஜ்யா (அ − க)}\right\}\right\}$ இதையே இங்கு (2 கோஜ்யா க) வை "சேத்யக" யாகவும், "ஜ்யா அ" வை இஷ்ட பாகத்தின் முன்பாகஜ்யாகவும்; கழிவு ஜ்யாவாக "ஜ்யா (அ−க)" இதையும், "ஹாரமாக த்ரிஜ்யாவையு" ங்கொண்டு :—

மகர்ஷிகள் ப்ரதிபாக ஜ்யாஸாதநம் செய்தார்கள். என்பதை அவசியம் உணரத்தக்கதாம் :—

மேலுமிவர்கள் இஷ்டப்படி ஏற்பட்ட வ்யாஸார்த்தத்தால் (3438' ஆல்) பகண கோல கலைகளுடைய = (21600)'ரு = (3438' × 6·2832) ஆர்யபடீயப் படிக்கு இதன் மிக்கக்ரூர் ஷே ரு = [(3437' − 44'' − 48''') (6.28318531)] என்பது மவசியம் உணர்க. (மற்ற விவரணம் முன் காண்க).

இந்த விதம் ப்ரதி பாகாதி (ப்ரதி அம்ச கலைவி கலை உபவிகலை முதலினவை களுக்கு ஜ்யாதி ஸாதனம் செய்யும் சுலபப்ரகார) (ஸம்மத)ம் ஆதி ஸித்தாந்த கல்பதரு முக்தாஹாரப் படிக்கேயாகும். :—

18

இதில் ப்ரதி பாகஜ்யா ஸாதகபத்ததியில் சொல்லிய பத்யங்களான:—

"அந்த்ஜ்யா நவதிஜ்யாச த்ரிபஜ்யா த்ரிபமௌர்விகா" விஷ்கம்பாரத்தம் து வ்யாஸார்த்தம் த்ரிஜ்யா நாமாநிசக்ஷதே" (1)"

தந்தேபபாஹுருது (62832) மிநவ்ருத்தே வ்யாஸார்த்தமயுத (100000) ஸங்க்யாஸ்யாத்" சக்ரகலா (21600') ஸமவ்ருத்தே, வ்யாஸார்தம் கஜபுராப்த்தி வஹ்நி (3438') மிதம்" "(2)"

பரிதே: கார்க்கராமாம் (360°)ச: ஏகாம்சஜ்யார்த்தமுச்யதே"
ஏகாம் சஜ்யார்த்தவர்க்கோந த்ரிஜ்யாவர்க்காச் ச யத்பதம் "(4)'

ஏகோந நவதிஜ்யாச உபாந்த்யஜ்யா ப்ரகீர்த்திதா"
ஏகோந நவதிஜ்யார்த்தம் த்விநிக்கம் (சேத்யகம்) பவேத் '(4),

ஏகபாகஜ்யயா நிக்நம் சேத்யம்வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்"
த்விதியபாக ஜீவாஸ்யாத் இத்புக்தம் தத்வவேதிபி: "(5)"

த்விதீயபாக ஜீவாக்நே, சேத்யே, வ்யாஸார்த்தஹ்ருத்பலே"
ஏகபாகஜ்யயா ஹீநேத்ருதீயாம் சஜ்யகாஸ்ம்ருதா "(6)"

த்ருதீயாம்சஜ்யகாநிக்நே சேத்யேவ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலே"
த்விதீயஜ்யார்த்த ஸம்ஹீநே சதுர்த்தாம் சஜ்யகாபவேத் "(7)"

சதுர்த்தஜ்யார்த்த நிக்நம் யத் சேத்யம் வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்"
த்ருதீயாம்சஜ்யயாஹீநம் பாணாம் $\left(\frac{0}{5}\right)$ சஜ்யாததாபவேத் "(8)"

சராம்ச $\left(\frac{0}{5}\right)$ ஜ்யாதயாநிக்நே சேத்யேவ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலே"
துரீயாம் $\left(\frac{0}{4}\right)$ சஜ்யயாஹீநே ரஸாம் $\left(\frac{0}{6}\right)$ சஜ்யேதிகீர்த்திதா "(9)"

ஷடம்சம் சஜ்யாதயாநிக்நம் சேத்யம் வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்"
விஷயாம் $\left(\frac{0}{5}\right)$ சஜ்யயாஹீநம் தத்ஸ்வராம் $\left(\frac{0}{7}\right)$ சஜ்யகாஸ்ம்ருதா "(10)"

ஏவம்ஜ்யார்த்தாநிநவதிம் ஸாதயேத்பண்டிதோத்தம"
ஜ்யோத்பத்தி: தர்சிதாப்யேவம் கோலவித்பிர்ம்மஹர்ஷிபி: "11"

வ்யாஸார்த்தவர்க்காத்பாஹுஜ்யாவர்க்கஹீநாச் சயத்பதம்"
கோடிஜீவா தயா ஹீநா த்ரிஜ்யா வ்யுத்க்ரமமௌர்விகா "12"

த்ரிஜ்யாஹதாபாஹுஜிவா கோடிமௌர்வ்யாவிபாஜிதா"
லப்த்தந்துஸ்பர்சரேகா ஸ்யாதித்புக்த்தம் மாதவாதிபி: "13"

வ்யாஸார்த்தக்நீகோடிஜீவா பாஹுமௌர்வ்யாவி பாஜிதா,,,
வ்யுத்க்ரமஸ்பர்ச (கோடிஸ்பர்சக) ரேகேதிகீர்த்திதம்மஜ்ஜுளாதிபி: "14"

த்ரிஜ்யாவர்க்க: கோடிமௌர்வ்யாபக்த்த: கர்ண இஹோச்யதே "-"
த்ரிஜ்யா வர்க்கஸ்து;

தோர்ஜ்யாப்த: பவேதுத்க்ரமகர்ணக: (ஸ்யாத்கோடிஸ்பர்சகர்ணக:) "(15)"

குறிப்பு:— அந்த்யஜ்யா = நவதிஜ்யா = த்ரிபஜ்யா = த்ரிபமௌர்விகா = விஷ்கம்பார்த்தம் = வ்யாஸார்த்தம் = த்ரிஜ்யா என்பதன் வேருபெயர்கள்

மேற்கூறிய (**15**) பத்யங்களின் பொழிப்புறை:—

(பரிதி) வ்ருத்தம் (வட்டம்) = 62832. ஆனால்; (அறை வியாஸம்) (அறைவிட்டம்) = 10000.

பரிதி 21600′ ஆனால் வியாஸப் பாதி = $\frac{1}{2}$ விட்ட = 3438′.

$$\therefore 2\pi = \frac{62832}{10000} = \frac{21600}{3438}$$

∴ (முதல் பாகஜ்யா = (வ்ருத்தஸ்ய சத (**100**) பாகாம்ச: தண்டவத்ருச்ய தே து ஸ:].

(என்கிற (லகதமகர்ஷி) வாக்யப்படி இந்த ஆதி ஸித்தாந்த கல்ப்பதரு முக்த்தா ஹாரப்படிக்கும்) = (ஜ்யா 1°.) ரு = $\left\{\frac{62832}{360^\circ}\right\} = \left\{\frac{21600}{360^\circ}\right\}$

$$= \left\{\frac{175}{10000}\right\} = \left\{\frac{60'}{3438}\right\} \because = \left\{\frac{(62832)}{(360^\circ \times 10000)}\right\}$$

$= \left\{\frac{(21600)}{(360^\circ \times 3438)}\right\}$. முறையே ஆகும்:

இவ்விதமே முதல் பாகஜ்யா ஸாதனமாம்—இதற்கு மேல் பட்ட 2,° 3,° 4,° 5,° முதலிய பாகஜ்யா ஸாதநங்கட்கு பத்யப்படி ஏற்பட்டவைகளை பக்கம் (**138**)ல் காண்க

இப்படியேற்படுவதால் பின்பு வந்த நவீனர்கள் :—

ஓர் பாகைக்குறிய சாபத்தை அல்லது கோணத்தை (க°) என்றும், வேண்டிய ஜ்யா (சாபீய அல்லது கோணீய) பாகங்களின் முன் பாகங்களுக்குறிய எண்களின் இடத்தை (அ°) என்றுங்கொண்டபடியால் :— இவர்கட்கும்:—

இஷ்டபாகங்களுடைய ஜ்யாஸாதநத்தின் பொருட்டு :—

இங்கு இவர்கள் த்ரிஜ்யாவையும் (1 = ஒன்று ஆக மதிப்பதனால்) :—

[ஜ்யா (அ + க)] = [2 கோஜ்யாக + ஜ்யா அ — ஜ்யா (அ — க)]. என்றேற்பட்டது.

இச்சமீகரண கண்டங்களை ஒன்றிலொன்றை மாறி மாறி யோக வியோகங்கள் செய்து நல்லயுக்தியுடையவர்கள் கணிதங்களைக்கணக்கிட த்ரிகோண மிதிகட்கு வேண்டிய (ட்ரிக்னமெட்ரி தியரிகள்) ஸகலஸித்தாந்தங்களுமேற்படுகின்றன. (பரிதி பாகங்களுக்கும் ஸாதனஞ் சேய்ய வேண்டி ஸூக்ஷ்மஜ்யாவிகிதவிதி முன்னுறையில் காண்க) :—

மற்றயவிவாணங்கள் வேண்டியபர்பந்தம் கூடுமானவறையிலும் இதன் முன் பின்ஸந்தர்ப்பங்களில் கூறியவற்றைக்கவனிக்குக :—இவ்விஷிதங்களை ஏனிங்கு கூற

வேண்டுமென்றால் ;—நவீனங்களின் எந்தவித மான கணிதங்களின் உற்பத்திக்கும். மகர்ஷிகள் காலத்திய ஸூத்ர பத்யரூபங்களாயுள்ள கணிதமிதிகளே மூலாதாரம் என்பதைக்காண வேண்டியது யாவரும் என்ற நோகக்கத்தால்:—

என்பது அவசியம் உணர்க:—

எதிலுமின்னும் பலவாறாக விகிதங்களிருந்தாலும் விரிவடையுமென்பதால் சிற்சில விசேஷங்களமைந்த கோட்டுக் கணிதங்களும் இவ்வளவுடனிங்கு முடிவடைந்தன.

வேறு :—

விருத்தம்

ஒரு பதினாறினூடே உத்திடுமிருபதுக்கே
வருநிலமென்ன வென்னில்
மருவிய ஒன்றுக் கோர்
வர்கமும் (கோராகவும்) வளுத்து விரே—(46)—

என்பது

கீள் மேல் — ௰௬ (16) று தென்மடல்—

௨௰ (20)று யெத்தனைஎன்னில்—

௰௬ (16)யும் — ய ($\frac{1}{16}$)ல் களிக்க — க (1)-

௨௰ (20)யும் — (ய) $\frac{1}{16}$ல் களிக்க — கவ ($1\frac{1}{4}$)—

ஆகையால் — கவ று (க) ($1\frac{1}{4}$று1) — (ப — ஓ.)

என்பது.

யெதுவுமிப்படிப்பார்த்துச் சொல்லவும்:—

வெண்பா:—

பாராய்கீழ்மேல் பனிரண்டே தென்மடலே
ஓராமல (ல்) நிலமுக்காணியாம்:—
நேராக - வந்தநில முந்திரியாய் மாறுபதினாறினலே
தேரந்த முருகைக்கியந்து சரிகொல்:— (47)—

என்பது:—

கீழ்மேல் - ௰௨ (12)று த்தென்மடலறியாமல் நிலம் சூ ($=\frac{3}{80}$) யானல் தென் ம(வ)டல் சொல்லறியும் வகை:—

முக்காணி (சூ $=\frac{3}{80}$) நிலத்தையும் முந்திரிப்படுத்த - ௰௨ (12)- இதை முந்திரிக் குழி - ௰௬ (16) என்று - ௰௬ (16)ல் மாறாகூ௰௨ ($12\times16=192$); இதை ஒருகைகோல் - ௰௨ (12) ருகிய ஈய்வு - ௰௬ (16) ஆதலால்,
தென்வடல் - ௰௬(16) என்பது:—

விருத்தம்:—

கட்டியோ ரெட்டு மாத்துக் காலரை முக்காலாகும்:—
செட்டியார் செத்துப் போனார் சிறுபிள்ளை மூன்றுபேரும்:—
வெட்டியும்(யோ) பகரொண்ணாது; விலையுமோ குறை யொண்ணாது:—
சட்டியாய்ப்பகரவல்லார் கணக்கர் கோடாலியாமே = (48)

என்பது:—

அ'இ — ச, அ'வ — உ, அ'ஞ — சு = அூ நிறை — மஉ. — = ($8\times\frac{1}{2} = 4$, $8 \times \frac{1}{4} = 2, 8 \times \frac{3}{4} = 6$) = அூ நிறை — 12 —

இதை ங (3) ருக்குடுக்க ஈய்வு — ச —

{ ங வ ஞ — ங ஞ உவ— உ இ — அூ சட்டி (அ)
$3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ — $3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$) — ($2\frac{1}{2}$ — அூ கட்டி = (8) }

ரு நிறை ச - (4) உஞ($2\times\frac{3}{4}$) சஇ ($1\frac{1}{2}$)-2வ ($2 \times \frac{1}{4}$). = இ ($\frac{1}{2}$), உ (2) அூ அ (8) ரு ச (4) ரு ஈனம் (சபடீ) ங (3) ரு நிறை - மஉ (12) சரி:—

குளவெட்ட ளவுக்கு:—

விருத்தம்:—

செப்பிய கீள் மேல் முப்பத்திரண்டு, தென்படலீரெட்டு—
ஒப்புடன் மட்டு முக்காலுக்குப் பணமுறைக்கு வேண்டில்—
தப்பிலாமட்டிலோரதை - தாக்கியோர் கய்யை (கையை) வீசத்
திப்படியாகச் செய்தே யிரண்டையும் மாறிச் சொல்லே = (49)

என்பது: —

கீழ்மேல் - ஙம உ 2(32)ரு தென்மடல் — மசு (16)ரு மட்டு — ஞ($\frac{3}{4}$)ரு யெத்தனை யென்னில்:—

பெருக்காமல் குறுக்குத்தானம் பார்ப்பது :—

ஙமஉ (32)ம் — ய ($\frac{1}{16}$) வீசத்தில் (மாகாணியில்) களிக்க — உ (2); மசு (16) (ம்) யும் மட்டில் கழிக்க — மஉ ($16 \times \frac{3}{4} = 12$) இதை ரெண்டில் மாற — உமச (24ஆதலால் ஷ்ஷ உமச (24) என்பது.

ஆசிருவிருத்தம் :—

கைய(யொ)த்தபிடியி லொருபத்து கொண்ட கோலினிற்
குள்மேநாலுமே — கனிவான — தென்மடல் ஒரு
ஞன்கு மட்டொன்று — கண்டபணை மொன்ருகவே
மெய்த்தபிடி மூன்ஞன்கு ருங்கோலதால் — விரும்பு
கீள்மேலாரதாய் வின்னய தென்மட லீரெட்டிதாய்
மட்டுமேயறை இதற்குவிலையை வைத்தலுறைசெயிற்

பிடியளவுதலைமாறி வாகுடனிரண்டு (கையும்)
கைய்யுமவ் —ரவாறுதாக்கி — மூன் று ஸையி
லிதுமாத்தி யே மட்டினிலுரைக்கமுதலே
(நே) ரெயுத்த கிள(கேள்)வியின் பிடியுமிப்படியு மே —
நேருங்கை மட்டுமே தான் — நீகண்டது கையை —
முன்னே விண்டதர்க்குதவி நீதியென்றுரை செய்யவே — (50) —

என்பது —

ய (10) பிடிக் கோலால் கிள்மேல் — ச (4)ரு தென்படல் ச (4)ரு — மட்டு — க (1) ரு ப—க (1)— ஆ — யஉ (12) பிடிக் கோலால் — கீ௳ சு (6) ரு தென் மடல் — யசு (16) ரு மட்டு — இ ($\frac{1}{2}$) ரு பட்டி யெத்தனையென்னில் :—

ய (10)ம் தனக்குமாற — ள — (100) — சருச — மாற — யசு ($4 \times 4 = 16$). யிதை முன்னிருத்தின —ள — (100) டனே (தாக்க) கூசுள ($16 \times 100 = 1600$) யிதை மட்டு ($க = 1$)ல் கழிக்க கூசுள ($\frac{1600}{1} = 1600$) என்று நிருத்தி — யஉ (12) யுந்தன் னில் மாற — ௱சயச ($12 \times 12 = 144$) — யசுரு சுருமாற கூயசு ($16 \times 6 = 96$) யிதை ௱சயச (144)ல் மாற — யஙகூஅ௱உயச = ($96 \times 144 = 13824$) யிதை பட்டு — இ ($\frac{1}{2}$) யில் களிக்க — சுகூகூளயஉ

= ($13824 \times \frac{1}{2} = \frac{13824}{2} = 6912$) — முன்ப— (பணம்) க (1)ல் மாற — சுகூகூளயஉ (6912) யிதை முன்னி ருத்தின — கூசுள (1600)ரு கருடுக்க யிய்வு — சவ டிகீ௳வடு ($= 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{160} + \frac{1}{1280} + \frac{3}{6400}$ $= 4\frac{2046}{6400} = 4\frac{1023}{3200}$ இம்மதப்படிக் கிவ்விதமேற்படுகின்றது — என்பது [ஷை ($\frac{6916}{1600}$) $= 4\frac{512}{1600} = 4\frac{8}{25}$ என்று வருகிறது. இதே சுத்தமென்பது வெகுத்தெளிவு, இதற்குமதற்கு முள்ள வித்யாஸமோ = ($\frac{1023}{3200} - \frac{1024}{3200}$) = ($\frac{1}{3200}$) என்பதாகின்றது. நியத பின்னத்தையனு சரித்த படியால் என்ப துணர்க :—

விருத்தம் :—

பதிகொண்டவூரில் பாதியு - (ம்) - மூன்றிலோர் பாவியமு
ஞவிலொன்ருய் பகறரிய —
ஆரிலோர் கூறுடைய நால்வராம்.
பகுதி பொன்னீரு ராகுமே ($2 \times 6 = 12$) விதிகொண்ட
படியிவை வகுத்திடி (ல்) யேன்மையாம்
வேண்டு பதினஞ்சு பொன்னே —
மேவியிடில் மூன்றுபொன் பிறவட்டமென்றிதனை-
வீருகவே தெறிந்தே - மதிகொண்ட
காணிக்கா ? சரிசெய்யும் (வகையினை)
வசையினை வகுத்து வேனன் பாகவே;—

வரிசையுடன் வா வா குரு (வாகாகவரு) மந்தயிவில்:—
முன்வந்திடும் பொன்னை மாறியே:—
நிதி கொண்ட பதினஞ்சு பொன்தனக்:—
குதவியே நீதந்த பிடிஞன்குமே:—
நேசித்த பிரவட்டம் முன்வட்ட:—
மிது சட்டம் நிற்செயற்றுறை (ச்சயிற்றுறை) செய்கவே= (51) =

என்பது:—

(விபரம்:—)

ஊருக்கு பாதிக்காரன், ௩ (3)ல் ஒரு காரன்-
௪ (4)ல் ஒரு காரன்- ௬ல் (6ல்) ஆறில் ஒரு காரன்:—
ஆ சனம் - ௪ (4) ரு பொது விளுற்றயிரை
ஷை (பொதுப்பகுதி) -௰௨ (12) ப— (பொன்)
இதை அவரவர் ஈவு வீதமாக பிறிக்கில்
பாதிக் காரனுக்கு ஷை -௬ — ($\frac{12}{1} \times \frac{1}{2} = 6$ பொன்)
௩ல் (3ல்) ஒரு காரக்கு -௪ — ($12 \times \frac{1}{3} = 4$ பொன்)
௪ (4)ல் ஒரு காரனுக்கு ஷை ௩ — ($12 \times \frac{1}{4} = 3$ பொன்)
௬ (6)ல் ஒரு காரனுக்கு ஷை ௨ — ($12 \times \frac{1}{6} = 2$ பொன்)

ஆ ஷை -௰௫ (15) (பொன்) யிதில் அதிகம் ஷை ௩ (3) பொன் ஆனபடியால் சரி சொல்லவகை:—

பாதிக்கு வந்த ஷை - ௬ (6 பொன்னு)ம் பிரவட்டம் ஷை - ௰௨ (12) யும் மாற -எ௰௨ ($12 \times 6 = 72$) - இதைக் கூடுதல் ஷை - ௰௫ (15) ருக் குடுக்க ஈய்வு - ௪ ப— அ = ($\frac{72}{15} = 4\frac{12}{15}$, $\frac{12 \times 6}{15}$ = 4 ப— 8

ஆதலால் பாதிக் காரனுக்கு ஷை ௪ ப—அ (4 ப—8); ௩ல் ஒரு காரனுக்கு — ௪ம் (4ம்) - ௰௨ (12)ம் மாற ௪௰அ ($48 = 12 \times 4$) இதை — ௰௫ (15)ருக் குடுக்க - ௩ ப— ௨ (முன் போல் $\frac{48}{15} = 3$ ப— ௨), ஆதலால் ௩ ப— ௨ (3 ப—2) எனபது:—

௪ல் - க - ரு ($\frac{1}{4}$ ரு) ௩ (3)ம் — ௰௨ (12)ம் மாற — ௩௰௬ (36) இதை — ௰௫ (15) ருக் குடுக்க ஷை - ௨௰௪ ($36 \times \frac{1}{15} = 2$ப—4) ௬ல் -க- (காரனு) க்கு — ௨ — ௰௨ மாற - ௨௰௪ ($2 \times 12 = 24$) யிதை - ௰௫ (15 ருக் குடுக்க ஈய்வு - ௰௬ (16 ப— = $\frac{24 \times 10}{15}$ = $\frac{240}{51}$ = 16 ப—)ஆதலால் ஷை- க ப— ௬ ($\frac{16}{10} = 1$ ப— 6) என்பன:—

இப்படி வரிலிதுவே தானமாகக் கண்டு சொல்லவும் — உள் வட்டமாக வத்தாலு மிதுவே தானமாகக் கண்டு சொல்லவும்.

௸	பொன்—பணம்	
௸	4 — 8	
௸	3 — 2	
௸	2 — 4	
௸	1 — 6	
௸	12 — 0	

ஆக பகுதிப்பொன் 12ம் சரி. இங்கு பணம் பத்துக்குப் பொன் ஒன்ருகக் கொள்ளப்பட்டிருப்பதைக் கவனிக்க வேண்டியது:—

விருத்தம்:—

உத்த தோர்காதம் காதம் ஒரு படி யடி போல் வேடன்
நித்தலும்(மும்) நடத்தல் வேணும்' நேரு நறலைந்து (நாலைந்து) [காத(ம், அ)]
மத்தனை ரெட்டிசெய்தேயிது தனிலொன்று நீக்கி.
சுத்தமாங்கண்டு ரேற்றினச்சுருக்கத்தைத் துணிந்து பாரேன் (52)

என்பது:—

ஒருபன்னி நாளொன்றுக்கு இருபதுகாதமோடும், அதை ஒரு வேடன்னாளொன்றுக்கு காதமதிகமாகப் படியடித்துகைபோலே துய்ந்தவன் எத்தனை ஞளையில் பிடிப்பானென்னில்:—

பன்னி ஓடுகிரகாதம் — உ௰ (20)ம் ரட்டிக்க — ச௰ [(40) = (20 × 2)] அதில் ஒன்று தள்ளி நீக்கு ௩௰௯ = [(40 — 1)=(39)] ஆதலால் —39=(௩௰௯) ஞளையில் பிடிப்பானென்பது —

விருத்தம்:—

மூப்பத்திரண்டு பனையைத்தெண்டு முனிந்தொருவன் —
சாணரி விரல் நாலேதானி (வ்) எப்பவது சென்றுய
ருமென்று முன்னியன்ற முளந்தனை
சாணுயேத் தியேதான்,
ஒப்பரிய சாண் விரல்தான் பனிரண்டாக
வுற்ற; துகையை பாரிந்த முயருமென்றே செப்பிய
தோரிருணூலேவர்க்கியத் தெண்டு
சேருணளின்னதென்று செப்பலாமே (53)

(முடப்பனை) = ௩௰௨ (32) முளம்; சாண் = ௬௪ (64); [சாண் —க (1) ரு விரல் — ௰௨ (12)] ஆ எ௱௬௰௮ =(64 × 12=768) யிதை சாணுகிய விரல் — ௰௨ (12) [தானந்த] விரல் — ச (4) நீக்கி — அரு (8க்கு)க்குடுக்க யீவு — ௯௰௬ ($\frac{768}{8}$ =96). ஆதலால்:—தொண்ணூத்தாறு [(96 =௯௰௬] நாளையிலேறுமென்பது.

மாவிடை பிளவதாகும்: பிளவிடை குன்றியாகு
மந்தேவுமாங் குன்றிரண்டு சிரந்த மஞ்சாடியாகு
மாவு மஞ்சாடி அஞ்ச மங்காலதுகாதும் கூடிற்
கர (கா) வியம் கண்ணாய் சொன்னேம் களஞ்செ‌ன்ன களவாமே
= (54). என்பது உ.————

அணுவெட்டு கொண்டது கதிகரெளு; கதிரெளு எட்டுக்கொண்டது தொத்துகள்-தொத்துகள் — அக் கொண்டது பஞ்சுட்டு — பஞ்சுட்டு யெட்டு கொண்டது நுண்மணல் — நுண்மணலெட்டு கொண்டது நொன் மணல் — நொன் மணல் — அ — கொண்டது ஐய்வி — ஐய்வி அக்கொண்டது கடுகு — கடுகு எட்டு கொண்டது எள்ளு — எள்ளு-அ(8) கொண்டது நெல் — நெல் -அ-கொண்டது விரல் — விரல் யஉ (பனிறண்டு) கொண்டது சாண் — சாண் உ (2) ரண்டு கொண்டது முளம் — முளம் ரெண்டு கொண்டது சிருகோல் — சிருகோல் — ச (4) நாலு கொண்டது செம்பியவள கன்றிருவுலகளந்த செம்பொற்கோலே (இது) அ (8)க் கோல் நிா-(500 = ஐந்நூறு) கொண்டது கூப்பிடு — கூப்பிடு — ச (4 = நாலு) கொண்டது காதம் — யிந்த விதம் பாத்துக் கொள்ளவும்:—

வேறு:—

ஒருவர்த்தகன் மாணிக்கங் கொண்டு
வந்து ரூசாவைக் காண
ரூசாவும் மதிக்க மந்திரியிடத்தில் சொல்ல
மந்திரிமார் — (ய = 10) — பேரும்:—
விலை சொன்னதற்கு வகை;—

(1) முதல் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் பாதியும் குறை ஒன்பதுபேர் சம்பளமும் பெரு மென்றான்:—

(2) இரண்டாம் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் மூனிலொன்றுங்குறையொன்பது பேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்:—

(3) ௩ (3)ம் மந்திரி யென் சம்பளத்தில் - ச (4)ல் க (1)ம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்;—

(4) ச(4)ம் மந்திரியென் சம்பளத்தில் ($\frac{1}{5}$)ம் நில் கம் குறையொன்பதுபேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—

(5) ௫ (5)ம் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் - சு-ல் - கம் ($\frac{1}{6}$)ம் குறை ஒன்பதுபேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்;—

(6) சு (6)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில்-எல்-கம் ($\frac{1}{7}$ம்) மத்த ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்.—

(7) எ (7)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில் - அ-ல் - கம் ($\frac{1}{8}$ம்) குறை யொன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—

(8) அ (8)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில் ($\frac{1}{9}$)ம் கூல் - கம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றுன்:—

(9) கூ (9)ம் மந்திரியென் சம்பளத்தில் - ய·ல் க-ம் ($\frac{1}{10}$)ம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றுன்:—

(10) ய (10)ம் மந்திரி என் சம்பளத்தில் - யக - ல் - க - ம் ($\frac{1}{11}$ ம்) குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றுன்:—

யிந்தவிதம் சம்பளம் விதிச்சுச் சொல்லவும்:—

[இக்கணிதகர்த்தா மேற்கூறிய கணிதத்துக்கு; மற்றவை கட்க்குப் போல்உதாஹரணம் விடைகணிக்காமல் விஞவோடு விட்டு விட்டார்:—

ஆகிலும் இவ்விஞவுக்கு உதாஹரண விவரணத்தினுல் விடையளிக்கப் படுகிறது:—

இவ்விஞமிகப்பெரிய தாகையால் முதலில் சிறிய உதாஹரணங்காண்க:—
மேல் கணக்கில் மொத்தம் அடங்கிவர்கள் 10மந்திரிகள்:—
நாமிங்கு முதல் 3மந்திரிகளை மாத்திரம் கொள்வோம் அப்போ:—
இங்கே தெரிய வேண்டியதற்கு =?;என்று கொள்ள,

$\frac{?}{2}+\frac{?}{3}+\frac{?}{4}=?\quad\therefore\ ?$ = என்ன.வென்றுல்:-

இங்கு தெரிந்த எண்களாகிய - 2, 3, 4 இவைகளை ஒன்றுக்கொன்று பெருக்கவும். ஒன்றிலொன்று அடங்கு மெண்ணுனல் அவ்வடங்குமெண்ணை விட்டு மற்றவற்றைப் பெருக்கக் கணிதம சுலப்பத்தில் முடியும்:—

$2\times3\times4=24$. இங்கு 4ல் 2 அடக்கமாகையால் ஷை 3×4 மாத்திரம் பெருக்கப்போதும் இதன் $=3\times4=12$.

24ற்கு பதில் 12ஐயே உபயோகிக்கலாம்.—

$\frac{?}{2}=\frac{1}{2}?,\ \frac{?}{3}=\frac{1}{3}?,\ \frac{?}{4}=\frac{1}{4}?\ \because$

ஷை $12\times\frac{1}{2}=6$
$12\times\frac{1}{3}=4$
$12\times\frac{1}{4}=3$

ஆ $=\ 13$

இக் கூட்டுத்தொகை (13)ற்கு 6, 4, 3முதலியவையாஞல் ஹாரகமான (12)ற்கு உறிய விதமென்ன வென்று த்றைஞசிக்கப்படி கணிப்பதே மந்திரிகள் குடுக்குந் தொகையாம்.

$\frac{12}{13}\times6=\left(\frac{72}{13}\right)=5\frac{7}{13}$ $\qquad\left(5\frac{7}{13}+3\frac{9}{13}+2\frac{10}{13}\right)=12$

$\frac{12}{13}\times4=\left(\frac{48}{13}\right)=3\frac{9}{13}$ $\qquad\left(5+3+2+\frac{7}{13}+\frac{9}{13}+\frac{10}{13}\right)$

$\frac{12}{13}\times3=\left(\frac{36}{13}\right)=2\frac{10}{13}$ $\qquad=(10+2)=12,$

என்பதாம்:—

இவ்விதக் கணக்கு (142, 143, 144)ம் பக்கத்தில் (பிறவட்டம் உள் வட்டம்) என்கிற விகிதத்தில் போடப்பட்டிருக்கிறது. ஆகையால் கர்த்தாவால் உதகரிக்கப்படவில்லை. அதைவிட இந்தக்கணக்கு சில விஷயத்தில் மாறியிருப்பதால் விவரிக்கப் படுகின்றது.

இந்தக் கணக்குப்பிறவட்டத்தை யனுசரித்ததாகும்.

வர்த்தகன் கொண்டுவந்த மாணிக்கத்தின் விலை இன்னதென்று தெரியாதபடியால், இப்படித் தெரியாத விலைத்துகைக்கு = (து) என்ற குறிப்பிடுவோம். விலைத்துகைக்குச் சமம் (து) ஆனல்:— மந்திரிமார் பத்துப்பேருங் கொடுக்கச் சம்மதித்த மாணிக்க விலைத்துகையோ கீழ்கண்ட வீதத்தில்:—

$$து = \left(\frac{து}{2} + \frac{து}{3} + \frac{து}{4} + \frac{து}{5} + \frac{து}{6} + \frac{து}{7} + \frac{து}{8} + \frac{து}{9} + \frac{து}{10} + \frac{து}{11}\right)$$

ஆகையால் (து = ?) என்ன வென்றால்:—

அதாவது மிகச்குறைந்த துகை என்ன:—

என்பது தான் பொருளிங்கு.

ஷ (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) இவைகளின் (அடக்கஎண் தவிர்த்த மிச்ச எண்களின்) பெருக்குத்துகைக்குச்சமம் = (6 × 7 × 8 × 9 × 10 × 11)ரு = (332640) இதை இன்னுங்குறைச்கலாம் [(அ–பொ–ம) = (L. C. M.)] அளவைப்படிக்கு:—

$$\left.\begin{array}{r|l} 2) & 6,7,8,9,10,11 \\ 2 & 3,7,4,9,\ 5,11 \\ & 3,7,2,9,\ 5,11 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \left\{\begin{array}{l} (11 \times 5 \times 9 \times 2 \times 7 \times 3 \times 2 \times 2) \\ \\ = (83160) \text{ என்றாகும்} \end{array}\right.$$

(332640 : 83160) = படங்கு (4) வீதத்தில் குறைவதை இங்கு கவனித்தல் வேண்டியதாம் :—

ஷ துகைக்குறியபங்கைக் கண்டுபிடிக்க (83160) தான் முக்கியமான முதலாதாரமாகின்றது.

பின்பு :—

(மந்திரிகளின் சப்பளவிகிதம் தனித்தனித் தேரியவேண்டுமோனல்:— இனி சோல்லும், வழியையே முக்கியமாகக் கோள்ள வேண்டியது):—

$$து \times \left(83160 \times \tfrac{1}{2}\right) = \left(83160 \times \frac{து}{2}\right) = (41580)\ து$$

$$து \times \left(83160 \times \tfrac{1}{3}\right) = (27720)\ து$$

$$து \times \left(83160 \times \tfrac{1}{4}\right) = (20790)\ து$$

(83160 × $\frac{1}{5}$ து) = (16632) து
(83160 × $\frac{1}{6}$ து) = (13860) து
(83160 × $\frac{1}{7}$ து) = (11880) து
(83160 × $\frac{1}{8}$ து) = (10395) து
(83160 × $\frac{1}{9}$ து) = (9240) து
(83160 × $\frac{1}{10}$ து) = (8316) து
(83160 × $\frac{1}{11}$ து) = (7560) து

(ஆகமொத்தமும்) = (167973) து

இங்கு புதிதாக ஏற்பட்ட எண்ணுக்கு =**(167973)**து; இதே ஹாரகமாகும். மேலே வரிசையாய்க் கூடுமெண்களாக வந்த(41580, 27720,)இதுமுதலியவைகளை $\left(\frac{83160}{167973}\right)$ இதனுல் த்ரைராசிக முறைப்படிப் பெருக்கக்கிடைப்பவைகளே:—

(சுலபகணிதத்துக்காக).

83160	(1)	167973	= (1)
166320	(2)	335946	= (2)
249480	(3)	503919	= (3)
332640	(4)	671892	= (4)
415800	(5)	839865	= (5)
498960	(6)	1007838	= (6)
582120	(7)	1175811	= (7)
665280	(8)	1343784	= (8)
748440	(9)	1511757	= (9)
831600	(10)	1679730	= (10)

$$41580 \times \frac{83160}{167973} = 20585\ \frac{68595}{\text{ஹ}} \qquad (1)$$

$$27720 \times \frac{83160}{167973} = 13723\ \frac{101721}{\text{ஹ}} \qquad (2)$$

$$20790 \times \frac{83160}{167973} = 10292\ \frac{118284}{\text{ஹ}} \qquad (3)$$

$$16632 \times \frac{83160}{167973} = 8234\ \frac{27438}{\text{ஹ}} \qquad (4)$$

$$13860 \times \frac{83160}{167973} = 6861\ \frac{134847}{\text{ஹ}} \qquad (5)$$

$$11880 \times \frac{83160}{167973} = 5881 \frac{91587}{\text{ஹ}} \qquad (6)$$

$$10395 \times \frac{83160}{167973} = 5146 \frac{59142}{\text{ஹ}} \qquad (7)$$

$$9240 \times \frac{83160}{167973} = 4574 \frac{89898}{\text{ஹ}} \qquad (8)$$

$$8316 \times \frac{83160}{167973} = 4117 \frac{13719}{\text{ஹ}} \qquad (9)$$

$$7560 \times \frac{83160}{167973} = 3742 \frac{134634}{\text{ஹ}} \qquad (10)$$

		(இவைகளின் மிச்சங்கள்)	
1.	20585	68595	(1
2.	13723	101721	(2
3.	10292	118284	(3
4.	8234	27438	(4
5.	6861	134847	(5
6.	5881	91587	(6
7.	5146	59142	(7
8.	4574	89898	(8
9.	4117	13719	(9
10.	3742	134634	(10
=	83155	839865 = பின்னங்களின் கூடல்.	

[(839865) ÷ (ஹாரம் = 167973)] = $(839865 \cdot \times \frac{1}{167973})$

= 5

முன் = 83155

ஆகமொத்தம் = 83160

இவ்விதம் த்ரைராசிக உதவியின்றி கணிதமே உலகத்தில் இல்லை பொதுவாக. ஆதலால் மாணிக்கத்துக்காக விலைக்கு

முதல் மந்திரி கொடுத்ததுகை = 20585 $\left(\frac{68595}{\text{ஹ}}\right)$

2 ம் ஷை = 13723 $\left(\frac{101721}{\text{ஹ}}\right)$

3 ம் ஷை = 10292 $\left(\frac{118284}{\text{ஹ}}\right)$

4 ம்	ஷெ	=	8234	$\left(\frac{27438}{ஹ}\right)$
5 ம்	ஷெ	=	6861	$\left(\frac{134847}{ஹ}\right)$
6 ம்	ஷெ	=	5881	$\left(\frac{91587}{ஹ}\right)$
7 ம்	ஷெ	=	5146	$\left(\frac{59142}{ஹ}\right)$
8 ம்	ஷெ	=	4574	$\left(\frac{89898}{ஹ}\right)$
9 ம்	ஷெ	=	4117	$\left(\frac{13719}{ஹ}\right)$
10 ம்	ஷெ	=	3742	$\left(\frac{134634}{ஹ}\right)$

{ (ஆூ மாணிக்கத்துக்காக வர்த்தக னுக்குக் கொடுத்தத்தொகை) } = **83160** = (து) }

இதனால் அந்த மந்திரிமார்கள் சம்பளத் தொகையையும் த்றைருசிக்கணித விகிதப்படி சுலபமாகத்தெரிந்துக் கொள்ளலாம் :—

என்பது:—

வேறு:—

ங (3) ள - க (1) உரி - (ம = 10)ந் தூரத்தில் மஉ (12) அடிக்கோலால் - குழி ா -ரு (100-க்கு) எ (7) உரிக்காலால் ஷெ — அமச (84) ள ஆூ அ (8)ந் தறத்தில்— மசு (16) அடிக்கோலால் குழி கூம (90)ரு-சு (6) அடிக்காலால் கோலால் நெல்லெவ்வள வென்று கேட்டால்:—

சொல்லவகை:—

— மஉ (12) டியுந்தன்னால் மாரி - ா (100)ல் பெருக்கி, பெருக்கினதுகையை யெட்டில் பெருக்கியிதனை சடசி - சு - (6)ல் பெருக்கி நிருத்திக் கொண்டு முத்துகையும் எ (7) யும் பெருக்கி நெல் அமச (84) ள - ல் பெருக்கி யிதனை -மசு (16 யுந்தன்னில் மாறின துகையுடனே பெருக்கி யிதனை குழி கூம (90)ல் பெருக்கி முன்னிருத்தினதற்குக் குடுத்துக் கண்ட ஈவையித்தனை யென்று சொல்லவும்:—

அய்ங்கோணம் போன்ற நிலமளக்கும் வகையாவது :—

வட்டத்தினளவு (வட்டத்தளவு) அளந்து அறைக்காலில் களித்து குருங்கோலுட னே பெருக்கி — ய $(\frac{1}{16})$யில் களித்து நின்றதை முந்திரியி $(\frac{1}{320})$ல் களித்து நிலம் சொல்லவும்.

— ய — (10) தாத்தில் — அஞ்சுமா-நிலம் உழுவன் ரு (5) உரிக்காலால் ஷை சய (40) பத்தாம் ள வருசைபளந்தால் அ (8) எட்டாந்தரத்தில் — ஆருமா நிலம் உழுவான் எ (7) உறிக்காலால் நெல் யெவ்வளவு அளப்பானென்று கேட்டால் அதற்கு வகை :—

ரு (5) ப—மாவும்-அ (8)ம் பெருக்கி எ (7) உறியிலும் பெருக்கி வைத்து-முத்து கைமுதல் மற்றனுஷ வகையும் பெருக்கி முன்னிருத்தினதற் குடுத்துக் கண்டயீவை யித்தனை நெல்லென்பது :—

வேறு :—

யிலங்கை-எா (700) காதம்-எறும்புத்தாறை விட்டால்-அதில் ஒரு விறகடைக்கு எா (700) எரும்பு துகையாக—எா (700) காதவளிக்கு பெரும்புத்துகை யெவ்வளவென்றால் சொல்லும் வகை :—

(இது சொல்வது :— முன்தூர அளவைப்படி சுலபமாகையினுல் காத்தா இதற்கு உதகரிக்கவில்லை என்பது.)

வேறு:—

கல்லளவு:—

உய (20) முள நீளத்தில் — உய (20) முள அகலத்தில் — சய (40) சாண் கனத்து க்கல்லை — உய (20) முள நீளத்தில் ய (10) முள அகலத்தில் — ச (4) சாண் (கனத்தில்) கல்லு முறிக்க வேணுமென்றால்:—

வகை — உய ரு உய ருமாற :சா (= 20 × 20 = 400) யிதைக் கனமான — சய (40)ல் மாற — யகூ (= 400 × 40 = 16000) யித்தை நிறுத்தி உய (20) முளத்துக்கும் — ய (10) முளத்துக்கும் மாற — உா (20 × 10 = 200) இதைக் கனமாகிய (வேண்டிய கனமாகிய சாண்) ச (4)ல் மாற — அாரு = (200 × 4 = 800) — [யிதை] இதனுல் முன்னிறுத்தின — யகூரு (16000) (ஐ)யீயய்வு-உய $= \left(\frac{16000}{800} = 20\right)$

ஆதலால் (கல்) உய (20) முறிக்கலா மென்பது:—

கூ (1000) முள அகலத்தில் — கூ (1000) முள நீளத்தில் — கூ (1000) முள கனத்தில் ஒரு கணு (என்றால் குன்று)—இதை ஒருமுள நீளத்தில் ஒருமுள அகலத்தில் ஒரு முள கனத்தில் (1 × 1 × 1ல்) ஒரு (ஒவ்வொரு) கல்லாக முறித்தால் யெத்தனை கல் முரிக்கலா மென்றால்:—

கூ ரு கூ: யாகூ (= 1000 × 1000 = 1000000) ; (பத்து றாருயிறத்துக்கு ஆயிர யாகூ ரு கூ = ா கோடி ரு = (1000000 × 1000 = 1000000000) நூறுக் கோடி — நிற்க:—

கரு. கரு: க; யிதை—க—ல் மாற—க = (1 × 1 × 1 = 1) யிதுக்கு முன்னிருத்தின —ா கோடி (நூறு கோடி) [க்கு]—(ஐ)க்குடுத்த யீய்வு—ா கோடி—ஆதலால்:— ா கோடி (100 கோடிக் கல்) முரிக்கலா மென்பது:—

வேறு:—

பலகையளவு:—

—ய-(10) முள நீளத்தில் உ (2) முள அகலத்தில்-அ (8) விரல் கனத்தில் பலகை (க) ரு (1க்கு) பணம் சு (6) ஆகு-ரு (5) முளநீளத்தில்-க (1) முள அகலத்தில்-நாலு (4)-ச-விறல் கனத்தில்-பலகை-க (1) ரு பணம் எத்தனை யென்னில்:—

முன்னிறை-ய (10) ரு உ (2) ரு மாற (10 × 2 = 20) உய-யிதையெட்டில் மாற ரசும (20 × 8 = 160); யிதை நிறுத்தி — பின்னிறை-ரு ரு-ச ரு மாற உய (5 × 4 = 20) யிதை பணமாகிய-(6ல்) ஆறில் மாற யஉய (120)-இதை முன்னிறுத்தின ரசும (160) ருக் குடுக்கயீய்வு— ஙு = ($\frac{120}{160} = \frac{3}{4}$) ஆதலால் [பணம் முக்கால்] என்பது.—

மற்றும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்:—

பணம்-க-ரு தூணி — ருய ஆகு ஷ ரு பணத்து ரு யெத்தனை யென்றாலும் = பணம் - க-ரு த (தூணி) ஆகு உயச ரு நெல்லெத்தனை யென்றாலும் = பணம் -க-ரு படி ருவ ஆகு கூய படி யெத்தனை யென்றாலும்- பணம்-க-ரு சேற்-சவ-ஆகு-க ப — உ-ருசேற்யெத்தினை என்றாலும் = ப— க-ரு பலம்-கூவ-ஆகு-அஙு-பலம் யெத்தனை யென்றாலும் = ப—-க-ரு காய்- ருஇ-ஆகு ப— வ-ரு காய் யெத்தனை யென்றாலும்-இப்படிப்பட்டப் பலப்பலக் கொள் முதல் கணக்கு:- கொள்முதல் (கொள்முதலெனத்தீர்க்கமாய் ஆராய்ந்து) விலைக்கும் ப— (பணத்து)க்கும் மாறிச் சொல்வது.

வேறு:—

கூய (30) ளுள்-கூய (30) பேர் சேவித்தானுக்கு-ய பணம் (10 பணம்)ஆகு யரு (15) ளுள் யரு (15) பேர் சேவித்தானுக்கு (பணம்) யென்னவென்றால்:—

சொல்லவகை:—

உய ரு கூய ரு மாற: கூள = (30 × 30 = 900) யிதை நிருத்திக் கடசியாகிய-யரு-ரு யரு-ரு மாற-உளஉயரு (15 × 15 = 225) யிது வுடனே- நடுவாகிய ஷ ய ப— (10 ப—) ஆவது-ள (10 × 10 = 100)ல் மாற - உயஉகூருள = [(100 × 225) = (22500)] யிதை முன்னிருத்தின - கூள (900) ருக் குடுக்கயீய்வு உஉரு (உ ப— ரு). (25— 2 பணம் 5) என்பது:—

ரெண்டுசாண் மட்டில் குளி-கூ (3) ரு மூணுசாண் மட்டில் குழி யெத்தனை யெஸ் றால்:—

முதல்-உ (2) ரு நடுவு-கூ (3) ரும்மாற—சு (6) யிதைக்கடசி-கூ (3) ருக் குடுக்க யீய்வு- உ (2) ஆதலால் (2) (குழி) ரண்டு யென்பது:—

உய (20) ளுள்-கூய (30) பேருக்குச் சம்பளம் அ (8) மீ (மாதத்தில்) ய (10) விரு கன் பொன்னுலல் பதினஞ்சு-(யரு) (15) ளுள்-சய (40) பேர் சேவித்தா னுக்கு எ (7) மீ (மாதத்தில்) யெத்தனை விருகன் பெருவாரென்னில்:—

சொல்லவகை:—

கடசி மாத்து (எ = 7)ம் ய (10)ம் மாற எய (10 × 7 = 70) இதனுடனே ஆரா வது சொன்ன-சய (40)ல் மாற உசூஆா (40 × 70 = 2800) இதுவுடனே அஞ்சாவது:யரு (15) வுடனே மாற-சயஉசூ (2800 × 15 = 42000) என்று நிருத்தி:—

முதலாவது சொன்ன இருவதும், ரெண்டாவது சொன்ன ஙய (30)ம் மாற- சூா (30 × 20 = 600)-ஙவது சொன்ன யெட்டில் மாற -சசூஆா (600 × 8 = 4800) இதற்கு அதைக்குடுக்க $(\frac{42000}{4800})$.

யீய்வு - = $(\frac{42000}{4800}) = (\frac{420}{48} = \frac{70}{8} = 6\frac{6}{8} = 6\frac{3}{4})$ ஆதலால் எட்டே முக்கால் (அஜ) (விருகன்) என்பதாம் :—

ய (10) – வயதில்—அ (8) கூத்தாடி – சூ (6) வாகை கொள்வானுக்கு – எ (7) யீல் – ய (10) விருகனுகை – ரு (5) வயதில் – ச (4) கூத்தாடி ங (3) வாகை கொள்வானுக்கு – ச (4) மாத்தில் யெத்தனைவிருக னென்னில் :—

சொல்லும் வகை :—

ய — (10)ம் – உ வது சொன்ன(அ)யெட்டும் ங வது சொன்ன–சூ (6)ம் -ச வது சொன்ன -எ-(7)ம் கூடக் கூட்டின = (31) ஙகை–யிதை நிருத்தி கடசியாகிய – ரு – ச – ங – ச (5 + 4 + 3 + 4) = ஆ 16 (யசூ) – நடுவாகிய – ய (10)ம் மாற ாசூய = (160 = 16 × 10) இதை முன்னிருத்தின ஙயக – (31) ருக் குடுக்க. யீய்வு – ருஹுசூ = $(5 + \frac{1}{8} + \frac{3}{80})$ அஞ்சேரிக்காலே முக்காணி (சுமாரில்); $(\frac{160}{31} = 5\frac{5}{31}$ என்பது வெகுசுத்தமாய்) ஆதலால் ருஹுசூ விருகனென்பது :—

வேறு.—

அ (8) முள உசறத்தில் – ய (10) முள நீளத்தில் ச (4) சாண் கொம்பில் – சூ (6) முளத்துதிக்கையில் ஆனைக்கு–ய (10) யீ-விருகன் ருய (50) ஆ – ச (4) முள உசறத்தில் – சூ (6) முள நீளத்தில் – உ (2) சாண் கொம்பில் – ங (3) முளத்துதிக்கையில் ஆனை – க – (1) ரு விலை யெத்தனை யென்றால்:—

சொல்ல வகை:—

முதலாகிய–அ ய-ச-சூ = (8 + 10 + 4 + 6) = ஆ – உயஅ (28) யிதை நடுவாகிய விருகன் ருய (50)ல் மாற–சூசா (28 × 50 = 1400) – கடசியாகிய (4 + 2 + 6 + 3 = 15.) இதை ருய (50)ல் மாற எாருய (750) நடுவாகிய – ய (10) [வும்] மாற–எசூருா (7500) இதை முன்னிருத்தின சூசா (1400) க்குக் குடுக்க ஈய்வு $(\frac{7500}{1400} = \frac{75}{14} = 5\frac{5}{14})$ என்பது:—

யசூ (16) டிக்கோலால் ஓர்மா நிலம்(-ப–மா = $\frac{1}{20}$) ரு ஷை (கடமை) சய (40ப—) ஆ யஉ (12) டிக்கோலால். நிலம்–ப–ரு–கடமை யெத்தனை யென்றால்:—

யஉ (12)யும்–யசூ (16) ருக்குடுக்க யீவு $(\frac{12}{16} = \frac{3}{4})$ = (ஜ)–யிதைத் தன்னில் மாற-இய = $(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}) \times (\frac{9}{16})$ இதைக் கடமையாகிய – சய (40)ல் பெருக்க – உயஉ இ $(= \frac{9}{16} \times 40 = \frac{360}{16} = 22\frac{1}{2})$. ஆதலால்-உயஉ இ-என்பது;—

சா (6) உறிக்காலால்—ா (100) எரு (நூறு கலத்துக்கு) அ (8) உறிக்காலால்) யெத்தனை யென்றால்:—

முதலுங் நடுவும் பெருக்கிக் கடசிக்குக் குடுக்கிறதுக்கு வகை:—

சா (6) ா (100) பெருக்க – சாா ($6 \times 100 = 600$) கடசியாகிய – அ (8) க்குக் குடுக்க எய்டு – ா $= \left[\left(\frac{100 \times 6}{8} = \frac{600}{8} = 75 \text{ கலம்}\right)\right]$ இதுக்குக் குறுக்குத்தானம் (எவ்விதமென்றால்):—

சா.ம் ஷ; ாம். எய்டு (6ம் $\frac{3}{4}$, 100ம் 75; அதாவது 8 ஞ 6 $= \frac{3}{4}$, இந்த $\frac{3}{4}$ லால் 100 ஐப் பெருக்க:—

($100 \times \frac{3}{4}$) = 75-எ- எழுபத்தைந்து கல மென்டது யின்னம் ஒருவகை:—

அஉ (8 உரி) க்காலால் -ா (100) கலமும் சா (6) உக்காலால் நெல் யெத்தனை யென்னில்:—

அ (8)ம் (100) ா-ம் பெருக்கிக்கடசி -சா (6) ருக் குக்குடுக்க ஈய்வு $= \left(\frac{100 \times 8}{6} = \frac{800}{6} = 133\frac{1}{3} \text{ ா}\right)$ = ாகூய்கூ. போக நீல ரு -உ (2) ரு -சா (6)ல் கூ (3)ல் பிரித்தால். உ (2) ஆனால் -க (1) எ ரு கூ (3)ல்-க-(1)ரு பிரித்தால் - த (தூணி) ஆ வைத்து -சாஉ (6உரி) க்காலுக்கு யெத்தனை யென்னில் ஆ [ாகூய்கூ.எ,த.] இங்கு (த = தூணி = (4) ச மரக்கால்) யென்பது:—

எ (7) உறிக்காலால் -ா-எ = (100 கலம்), அ (8) உறிக்காலுக் கெத்தனை யென்னில்:—

எரு ாரு மாற – எா- யிதை அ-ரு (குக் குக்குடுக்க) யீய யீய்வு $\left(= \frac{7 \times 100}{8} = \frac{700}{8} = 87\frac{2}{4} = 87\frac{1}{2} \text{ எ}\right)$ அய்எஇஎ ஷ அய்எ- எ தஹ (த = தூணி, ஹ = பதக்கு) கூ உறி, யென்பது:—

இதுச்குச் சு(ரு)க்கம்:—

முதலும் நடுவும் பெருக்கிக் கடசிக்கு ஈய்ந்து சொல்லுகிற தானம் சரியே.—

கடைசியில்-அ(8) உறிக்காலென்று வந்தால் முதலுங் நடுவும் மாறிக்கண்டதுகையை அறைச்காலில் களித்துக் கண்ட துகையை - [க(1ல்) ஒன்றில் கழித்து நெல் சொல்லவும்:—

(ப— க (1) (ரூ.) = பணம் ஒன்றுக்கு ஷ 1நெல்) [ங - கூ உறி] (முக்குறுணி மூன்று உறி) ஆ -கூய்சா ப— (36) பணத்துக்கு நெல் யெத்தனை யென்னில் யிதுக்குச் சுருக்குத் தானம்;—

க (1) ள மரக்கால் - ௰உ (12); அதாவது ஓர் கலத்துக்கு ஆகிய மரக்கால் பண்ணிரடு (ஆகையாலே) பணமாகிய மூப்பத்தாறு—ரூப் பொன்னும் ௩௱௬௰ (36 × 10 = 360) ௰உ (12) ரு ௩௱௬ (360) மீய மிய்வு = ௩௰ (30) ஆகி யிந்த மூப்பதும் - ௰ - ருக்குடுக்க ௩ (3) ஆக்கிக்கொள்ள. ௺. ௩ உறி (முக் குறுணி மூன்று உற்) ஆவது ௩வ்வு மாற - ௰வு (10⅛) யிதைக்கனப் படுத்த - ௱கவ (101¼) ஆனல் - ௱க-ள - (௺)ந (101 கலம்-ஒரு முக்குருணி) என்பது:—

கீழ் வாயிலக்கங்கேட்டதற்கு வகை:—

ஞ ரு ஞ யெத்தனை என்றால் - ஞ ஆம் நாலுபங்கு வச்சு ஒரு பங்கு தள்ளி மூணுபங்கும்-இய - ஆதலால் ஞ ரு ஞ: இய ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$) அறையே வீச மென்பதாம்:—

இ ரு இ ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$) என்னவென்றால்:—

படுவதி பண்ணி - வ ஆவதால் இ ரு இ: வ ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) என்பது:—

வ ரு வ ($\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = ?$) யெத்தனை யென்றால்;—

வ = $\frac{1}{4}$)ன் ச (4)ல் க (1)ரு = ய ($\frac{1}{16}$) ஆனபடியினாலே வ ரு வ: ய ($\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$) வீசம் என்பது.—

கள (=) கலவாய், த (தூணி) வாயி; ப (படி) வாய், (ஷை கீழ்வாயி) யிந்த நாலு வாயிலே யெது தூண்டிக் கேட்டாலும், கேட்டவகை சொல்லவும்.

சள (கலம் 1க்கு) ரு ஞ (முக்கா) யெத்தனை யென்னில்:—

கள (1 ள) த்துப்படி — ௯௰ (90) யிந்த — ௯௰ — ம் முக்கா (ஞ) வில் சுழிக்க — ௬௰எஇ ($90 \times \frac{3}{4} = 67\frac{1}{2}$) ஆமே-நாளி (நீ) யில் கழிக்க — ஹுபஉ உரி— ஆன படியினாலே—க ஞ ஹு பஉ உரி யென்பது.

த ரு ஹு யென்ன வென்றால்:—
த — ரு படி — ௩௰; ௩௰-வு ௩ ஞ; ஆனபடியினாலே—தருவு — ௩ உறி ௩ ஞ யென்பது:—

ப ரு வ யெத்தினை யென்னில்:—

ப. ரு. படி. ௬, ௬.வ - கஇ; ஆதலால்-ப. ரு. வ. (கஇ)உ-உரி யென்பது— உ (ரு) ஞ யெத்தினை யென்றால்:— உ ரு — சுவடு—ச௰-ஞ: ௩௰.யிதனை. வுல் களிக்க:—௩ ஞ — ஆதலால்—உறி (ரு) ஞ: ௩ ஞ:—

வேறு:—

க ய ($1 \times \frac{1}{16}$) முதல் ௯௰ (90) வறைக்கு மெத்தினை யென்னில்:—

௯௰ (90) ரு இனம் — ௯ (9) யிதுடனே — க — கூட்ட ௰ = (9 + 1 = 10) — இதில் பாதி—ரு; அஞ்சும் — ௯ — ம் மாற = ச௰ரு (9 × 5 = 45) — ச௰ரு (45)— சள௫௰ (450)-ச௲ருள (4500)-ஆக ச௲௯ள௯௰ரு (4500 + 450 + 45 = 4995) ௯. ரு. (இனம்—௯ள = 900)ஐ களிக்க - ௯ள-போக-நீட ரு-ச௲௯௰ரு (4095–900 = 4095) இதைப் பிறந்த ய ($\frac{1}{16}$) வாயில் களிக்க — உளரு௰ருஞ ௺ ($\frac{4095}{16}$)

$= 255\ \frac{15}{16} = 255 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}$) என்பது :—

குழி க. ரு (குழி 1க்கு) ரு உரி ஹ (5௳ உரி சுவடு) ஆூ (சு) நிலத்துக்கு நெல் யெத்தனையென்னில் :

[குறிப்பு :— குழி என்பதின் $= (12 \times 12 = 144$ சதுர அடி கொண்டது); (சு $= \frac{1}{40}$) என்பது அரைமா நிலம்:]

(சொல்ல) வகையாகப் பார்க்குறது :—

(ரு உரி ஹ) ஆவது (ருஇஅ) என்று வைத்து - (மீ = மா)-நிலத்துக்- ப (மா) குழி (குழி) உஅருமிசு (256) ஆக-சு ($\frac{1}{2}$ மா) ரு குழி ாஉஅ (128) யிதை ருஇஅ ($5\frac{5}{8}$) அுடனே மாற ($128 \times \frac{45}{8} = 720$) எாஉ0-யிதை-உரி வாயில் களிக்க :- ஷை அள (8 ள) எட்டுக்கலம் :—

யிதுக்குச் சுருக்குத்தானம் :—

ரு உரி ஹ யு (ப்) ($5\frac{5}{8}$)=ருஇஅ - (சு) வில்பாதி காணி ($\frac{1}{80}$) காணி(க=1) -(ரு) முந்திரிப்படுத்த ச ($4 = \frac{1}{80} \times 320 = \frac{32}{8} = 4$ ∴) ஆக்கிக்கொண்டு (ருஇஅ) அுடனேமாற உஉஇ ($22\frac{1}{2}$) யும் — த - வாயில் களிக்க - எள (7ள) எ மீ (7 மாக்கா) ரு உறிமாவு [அ (8)] எட்டுமாக்கால் கூடக் கூட்டி 8 (அ) அள(8 காலம்) என்பது :

குழி க ரு நெல் ச உறி - ஆூ நில - ப - ரு நெல் யெத்தினையென்னில் :—

ச (4) (மா) உரியாவது - சஇ ($4\frac{1}{2}$) என்று நிருத்தி — ப-வில் பாதி-சு - ரு - ஹ - அ (8)ம் சஇ ($4\frac{1}{2}$) யும் மாற-ஙமிசு (36)ம் த-தூணி-வாயில் களிக்க-ள - அ-ம் (கலம் - 8ம்) - ப- வாயில் களிக்க ஷை மிஉ (12) ள - இதுவுடனே - சு - ரு - த - ஹ கூட்டிக்கொள்ள - ஷை மிஉ (12) ள ; த ஹ கூட்டிக்கொள்ள — மிஉ-ள-த-ஹ = 12 கலமும் தூணியும், பதக்கும் (என்று) இப்படிப்பார்த்துக்கொள்ளவும் :—

குழி-க- ரு ஷை ப ஆூ ஷை மிள (கல $= 10$) ரு ஷை யெத்தனையென்றால் :- குழியாவது - வஅ ($\frac{3}{8}$); இதனுடனே மிள - மாவது (10 - ம்) மாற ($\frac{3}{8} \times 10$) $= 3\frac{3}{4}$ = ஙஹ-இதனை சு (6) ருக்குடுக்க ஈய்வு - இஅ ($3\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{8}$) — ப ($\frac{1}{20}$) வாயில்களிக்க ($\frac{5}{8} \times \frac{1}{20} = \frac{5}{160}$) $=$ சு -மி -என்பது :—

மீ (மா) நிலம் - ப ; ப—ரு ஷை மிள (10 கலம்) ஆூ குழி - அ - ரு நெல் யெத்தனை யென்றால்:—

குழி - க — ரு - வஅ - நெல் (இதை) பதிங்கலமான - மி (10)ல் மாற - ஙஹ ($3\frac{3}{4}$) யிதை அ (8) டனே (யும்) மாற - ஙமி (30) - யிதை (உரி) வாயில் களிக்க ஷை - த:—

யிது தன்னிலும் விகடமாகச் சொல்லவந்தால்;—

வஅு ($\frac{3}{8}$) ஆவது - ப ஜ (மகாணி $= \frac{1}{16}$); ப ஜ யும் ($\frac{1}{16}$ வையும்) க (1) வஅு ($\frac{3}{8}$) யும் (6) சு - ஆ வைத்துக்கொண்டு ஷ சு (6) உறி ஆறைல்-ப - யும் ($\frac{1}{20}$ம்), இஉறி ($\frac{1}{2}$உறி), ரு ய ($\frac{1}{16}$) யிப்படிப் பார்த்துக் கொண்டு பார்க்குற கணக்கு மூண்டு:—

யிது விரித்துக்காட்டல் :—

மீ (மா) நிலம் - ப - ரு - ஷ ஞள - தரு உறி ஆ (கலம் $=5$; த $=5$, உறி நாழி ஆ(குழி) அ (8) ரு ஷ யெத்தனை யென்னில்:—

ஞள (5 கலம்) ரு (5) சு (6) மாற ௩ம (30) ரு (5) ரு - இ ($\frac{1}{2}$) $=$ உஇ ($2\frac{1}{2}$), ஞளிக்கு— ய ($\frac{1}{16}$) ஆ ரு - ய: வய ($\frac{1}{16} \times 5 = \frac{5}{16}$) ஆ ௩மஉஅ ய ($32\frac{13}{16}$) யிதைக்குழியாகிய - அ (8) உடனே மாற - உாசுமஉஇ ($32\frac{13}{16} \times 8 = 262\frac{1}{2}$) இதைக் குறுணியாயில் களிக்க.—

மருஉசு ($13 + \frac{1}{10} + \frac{1}{40} = 13\frac{1}{8}$) இதை ஞளியில் கழிக்க ஹ உறி ஹ, ஆதலால், ≐ ஹ உறி - ஹ — யென்பது:—

குழி — வஅு — என்று வந்தால்.—

ப. (மா)-நிலம் — உாருமசு (மாநிலம் 256) ஆனபடியினாலே — கலமாவது — கூமசு (96) படியாகையாலே—இதை—உாருமசு (256) ருக்கிய ஈய்வு$\left(\frac{96}{256}\right.$ $=$ ஔ $= \frac{3 \times 32}{8 \times 32} = \frac{3}{8}\Big)$யென்பது—

ஆனபடியினாலே—குழி வஅு (காலேரிக்கால்) ஆச்சுது:—

குறிப்பு:—

யெந்தக்கணக்குச் சொன்னாலும் இப்படித்தானம் கண்டு பார்த்துச் சொல்லவும் —யிதுவும் — கூ (9) (க $=$ 1) ஸ்தானத்துக்கு மேல்வந்தாலும் — சில்வானங் கூட்டி விகடமாக வந்தாலும்.—

அதுக்கு—களரு (1கலத்துக்கு) சு (6) ஆகவும்:—

ஞளிக்கு — ய ($\frac{1}{16}$) யிந்தப்படி வைத்துப் பார்த்துக் கொள்ளவும்:—

(வேறு):—

பணவிடை அஞ ($8\frac{3}{4}$) கொண்டது விராகனென்றும் — விராகன் — உம (20) கொண்டது — பலமென்றும் — (விராகன்) உமச (24)கொண்டது-தாருபல மென்றும் — தாருபலம் — உம (20) கொண்டது வீசையென்றும் — வீசை ரு (5) கொண்டது துலாம் — என்றும் — யிதுவல்லாமல்:—

பலம் ச (4) கொண்டது சேர் என்றும்—சேர்—சம (40) கொண்டது மனு என்றும் இப்படிக்கு நிருவடி. தேசத்திலே நடந்து வருகிறது — அவ்வளவும் தேச பாஷை (தேசபாஷை) யாக நடக்கும்:—

வெள்ளிக்கும் - ரெத்தினத்துக்கும் (— ரத்தினத்துக்கும்) விகற்பம் வருமாறு:—

விளக்கம்:—

பணவிடை அஅ ($8\frac{3}{4}$) கொண்டது வெங்கட்டராயன்வில்லிட்ட கூ- யென்றும்:—

பணவிடை - மஉ (12) கொண்டது - களஞ்சு யென்றும்:—

களஞ்சி - க (1) க்கு - மஞ்சாடி -உம (20) என்று மாவுமென்றும் ஆகையால்;—

மஞ்சாடியும் மாவுஞ்சரி :—

ஒரு மாவுக்குச் சிறுமா - ரு (மும்மா) என்று சொல்லுவது:—

அ($\frac{1}{16}$ = மாகாணிக்கு) ரூ. மஞ்சாடி - கவ - ($1\frac{1}{4}$) என்றும் - ப. ரூ ($\frac{1}{20}$ ரூ = மாவுக்கு) சிறுமா - ம (10) மாயென்றும், [ச = ச] = $\frac{1}{80}$ ரூ மஞ்சாடி ஷ ($\frac{3}{4}$) சிறுமா - சு (6) மாப்பொன்னென்றும் ($\frac{1}{32}$ =) ஸ = ரு - குன்றிப் பொன்னென்றும் உ ஓ = ($\frac{1}{80}$) ரூ ப (ப) மாபிளவு யென்றும் உ ஏ = ($\frac{1}{160}$) ரூ சிறு மா - ப விருகன் யென்றும்:—

சிறுமா – ரசும (160) கொண்டது களஞ்சி யென்றும் - வி.ம விருகன் — ம = (10) கொண்ட தென்றது:—

பணவிடை - க - (1) ரூ - மஞ்சாடி - கஇஐ ($1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = 1\frac{3}{5}$)- யென்றும் பவளத்துக்குக் களஞ்சி மேல் விலையாகவும் - வெள்ளிக்கி - மஉஇ ($12\frac{1}{2}$- பணவிடை காசு-என்றும்—துலாம். உம (20) பாரமென்றும்:—

காட்டப்பாக்கு - உமக (20000) இருபதாயிறம் - கொண்டது - க அவனமென்றும் :—

பரிமளக்குங்கு மப்பூவுக்கும் - சசேரென்றும் :—

கஸ்தூரிக்கு அடைக மென்றும் - யிப்படிப் பேரிட்டுவரும் - (கூரின்) கூரின் பேரின்படியே விலையிட்டுக் கொளளவும் - என்பது :—

(8)உ க்காலால் ஷை அள (8 கலத்து) ரூ ஷை மச (14) ஆ கூ (9) உக்காலால் ஷை ரும (50) ள ரூ யெத்தனை யென்னில் - முன்யெட்டும், பின்யெங் (8) கலமாகிய - அ (8) ரூக் தன்னைமாற - சுாச ($8 \times 8 = 64$) யென்று நிருத்தி - பின் - கூ (9)ம் - ரும (50) ள மாகிய (50) ரும -ம் மாற ($9 \times 50 = 450$) சாரும - பின் நடுவாகிய - மச (14) ம் பெருக்க ($= 450 \times 14 = 6300$) = சுகா - யிதை முன்னிருத்தின சுச (64) ரூக் குடுக்க - ஈப்வு = கூமஅவாஹ ($= \frac{6300}{64} = 98\frac{7}{16}$); ஆகலால் - க ஷை - கூமஅவாஹ ($98\frac{7}{16}$) என்பது:—

(20) வீ— படியால் துலாம் - க (1) ரூ ஷை க ப-2 = (1 ப—2) ஆ. உமச (24) வீ—படியால் துலாம்—ம (10) ரூ. விலை பணம் பெத்தனை யென்றன் :—

ஐந்துகை விகற்பமென்றறிந்து — முன் — உ௰ (20)ம் (ம்) க (1)ம் — மாற — உ௰ என்று நிறுத்தி உ௱௪ (24)ம் — ௰ (10)ம் மாற உ௱௪௰ ($24 \times 10 = 240$) - இதுவுடனே - ௰உ ($1 \times 10 + 2 = 12$) ம் மாற - (2880) - உ௲ அ௱ அ௰ - யிதை முன்னிருத்தின - உ௰ (20) க்கீய்ப்பிப்பு - ௱௪௰௪ = ($\frac{2800}{20}$) = (144) ஆகலால் ௰௪ ப— ௪ = ($\frac{144}{10}$ = 14ப— 4) பென்பது.

இந்த வகையிலே - பாக்கு மிளகு - ஆவினந்து - பெருங்காயம் - ரசம் - சாதிலிங்கம் - கோஷ்டம் - மலாக்காய் - பச்சை - வெட்டி ஆட்டுக்கால் முரியன் -சந்தனம் - கொம்பிராக்கு-கற்பூரம்-வசுகான்-சூடன்-குங்குமம்-கோரோசினை சாம்பிராணி - தேங்காய்ப்பளு - மறவெண்ணை - தேன் - நெய் - யிந்த வகையிலாட மென்று வந்தாலும் - குறைப்பட்டை - சாதிலிங்கம் - வங்காளப் பச்சை - யிப்படியிருக்கப்பட்டதும்.

அளக்கப்பட்ட - நெல் - அரிசி - கோதுமை - பருப்பு - பயறு - எள்ளு ஆமணக்கு - முத்து - யிந்தவகையில் அளக்கப்பட்டதும் - சூரியவட்டம் - ஏகாங்கு சிவப்புத்தாவத்திப்பச்சை$_2$ - தாவத்தியளகு$_3$ - வன்னச்சுளிகை$_4$- யிப்படிப்பட்டதுக்கெல்லாம் - ௪ (4)ம் - ஒன்றுக்குப்பணமிருந்தேணபாக - க (1) சமென்டு-(ஒன்று முதற்கொண்டு) பெருக்கை சொன்னாலும்-பிங்கன(ம்) சொல்லப்பட்டதுக் கெல்லாம் முத்துகை விபரமென்றறிந்து சொல்லவு மென்பது.

நவரற்றினத்துக்கு (நவரத்தினத்துக்கு) விலைவக்கிரது (வைப்பது) சிகப்புக்கு பணவிலையின் மேபிலே - வயிரத்துக்கு - நிபச்சபஞ்சாடி-அதைத்தன்னில் மாறிக் கண்டதுகையை தே ($\frac{3}{1}$)லில் கழித்துக்கண்டது சவ்வு யென்றும், வய்(வை)டுரியம் - கோமேதகம் - புஷ்பராகம் நீலம் - இதுக்கெல்லாம் பணவிடை - பணத்துக்குக் காஞ்சு-யிந்தப்படிக்கண மதியிலே (இந்தபடிக்காண மதியிலே) வர்த்தகர் சேத்திரங்கண்டு விலைவைக்கிரது.

நாகமென்றதுவே (நாகமென்றதுவே) - மாணிக்க மென்று பிறப்பிற்ற சிவப்புக்கு - வஉகம் - பாங்கிய உகைல சொதகு (சுரத்த) காந்தி - மாங்கிஷகாந்தி - யிளமாணிக்கம்-பைக்கொராவை-கட்டையிதுகளிலே லட்சுமி விளைந்திருந்தால் - (குர்த்தப்) பச்சை-பச்சையகிபலடி சக (சுத்து)-க்கு முரு இனம் முக்கால் இனம் - யிக்காந்தி யிதுகளிலே - பழயது புதியது - நீலத்தில் ஒளுகும் நீலம்-துரும்புபிடிக்கிரது முண்டு - வெள்ளைப்பாக்கம்-யிதுக்கு-க குத்தமாந்தவிந்து நாகவிந்து - வியாத்ரிஸ்-யகிரம்-கப்புத் தெனவனனம். [(கப்புத்தேன்வன்னம்) = (கொப்புத்தேன்வர்ணம)] தாமரைநிறம்-திரையுண்டாயிருக்க வேணும்.—

வயிரத்தில் ககைபுஷ்பராகம் - யிருகவிளவேணு சாம்பிலே கமபி விளுந்தால் விரும்கம் பியென்றும் - பௌமம — பாந்திரையுண்டாகியது - கோமேதக மென்று சொல்லும் முத்துக்குத் தெளிவு - காந்தியிருகி விளுந்தால் ஆணி முத்து யென்று பெறும் யிந்திரகோபகாந்தி சாம்பிராணி பவளமென்று(ம்) பேர் ஆ. நவறற்றினம் ஒன்பது யென்று சொல்லவும்;—

தீர்வை:—

லம் — ப — ரு ஷை ச ப— ஆ நில ருப் ப— சூ ா - ரு தீர்வை -பரு தீர்வை (தீர்வை) கழிவு - ா கீழ் தள்ளி ௨ ச ப— வா - ரு ப— சுவ போக நீ—க்கு கழிவு தள்ளி - ஷை (௲ப — ௲து) ௲ பட ௲து - யிதனை ரு ப — சூ ா — உடனே பெருக்கி - ஷை ாகூ ப — (வசு ா) யென்பது ௨.—

வேலி - க - ரு — அ — ஆ வேலி - ரு-ம் - உ - நிலத்துக்கு யெத்தனை பண மென்றால்:—

யெட்டையும் - அம - ஆக்கி - ரு-ம் உ — யுமாற - சாகூ - யிதற்கு - சம ப— கூ - யென்பது -

(மா-நில-) - ப - ரு ஷை மரு-ள. ஆ — மஉது குழி ரு யெத்தனை யென்னில்:—

மஉது ஐ,(குழி) யில்களிக்க-ளாருமை ($=750=12000\times\frac{1}{16}$) யிதனை ப $=\frac{1}{16}$ ல் களிக்க - சமசுது௫ - ($750\times\frac{1}{16}=46\frac{7}{8}$) யிதனை நிலமாக்க ௨ சாகூ — சூா - யிதனை - மரு-ள மான - மரு - உடனேமாற - ளா௲௫ - யிதனை கலைப் படுத்த - ளா௲ — ள (703 - ள) ப ச (ப 4)௨ யென்பது :—

நெல்லு - ரு உறி- குத்த அரிசி - ௲௨றி ஆ-அ-உறிக்காலால் ஷை கூம-ள (60 ள) நெல்குத்த விட்டால் - சு௨-க்காலால் அரிசியெத்தனை யென்றால்:— யிதன் கண்ணளிவு.

கவி :—

கடைதலையைத்தான் பெருக்கிக் கண்ட தொகையை நிறுத்தி
நடுமூன்றுமாத்தி நடத்துபட நல்லீர் - ஆயக்க
கணக்கும்படியே அன்புடனே நின்றதுகைக்
கியந்திடாய்— ச்சொன்னேனியம்பு :(55)

மூன் - ரு - யும் - பின்னை (க) யும் - ௲ம (5 × 6 = 30) நிறுத்தி— 2 ஆவது சொன்ன - ௲-ப் ௲ - வது சொன்ன - அ - ப்மாற - உபச - யிதை ச(4)வது சொன்ன - கும - ல்மாற - அசாசம (3 × 8 × 60 = 1440) - யிதை முன் னிருத்தின - ௲ம - பெருக்கிய யிப்பு - சாஅ - ஆதலால் - சமஅ - ள

$$\left(\frac{3\times8\times60}{5\times6}=\frac{1440}{30}=48\text{ - ள}\right)$$ அரிசி யென்பது :—

கவி :—

யிடையுமுளமென்றே யென்றரிந்து மடநல்லீர்
மாறுபடநல்லீர் நீருடனே மூன்றுதனைப்
பெருக்கி முன்னின்ற தற்கிந்து
யென்னே கணக்கென்றேயியம்பு (56)

யென்பது :—

அய்ந்துகை விகற்பமென்றறிந்து கொள்வது.

(அவை வருமாறு) :—

ரு (5) உக்காலால் ஷை ஹு (பதக்கு) அரிசி - ப உ உ (படி உவ) ஆ அரிசி - யசு (16) ள சு (6) உக்காலால் ஷை யெத்தனை யென்னில் :—

(௩) வது சொன்ன (எ) ம். அஞ்சாவது சொன்ன - சு-ம் மாற - சயஉ ($6 \times 7 = 42$) நிருத்தி (2) வது சொன்ன - யசு - ம் முன் - ரு - ல் மாற - அய - ($16 \times 5 = 80$) - இதை ச - வது சொன்ன யசு-ல் மாற - உாஅய - இதை முன்னிருத்தின சயஉ - ருக்குடுக்க யீப்வு ௩யசவகுசு- உரி -இதை கலத்தில் கழிக்க - ௩ய - ள - த - ப ரு உ (30 கலம் - தூணி 1, ப 5 உரி :—)

குறிப்பு:— மேலே சொன்ன — (உாஅய) என்பது — கணிதப்படி — ௲உாஅய ($80 \times 16 = 1280$) ஆகவேணும்—என்பதுணர்க— ஓர் எழுத்தின் லக்கம் —௲ என்பது விட்டுப்போயிருக்கிறது:—

$$\left\{\frac{16 \times 5 \times 16}{6 \times 7} = \frac{1280}{42} = 30\tfrac{10}{21}\text{ள}\right\}$$ யென்பது:—

ருஉ ரு அரிசி—௩—உறி ஆ—அஉக் காலால் அரிசி — ௩யஉள (32 கலம்) — த —ஹு (தூணி — பதக்கு) ரு சுஉக் காலால் யெத்தனை யென்னில்:—

உ. ஆவது சொன்ன — ௩ (ம்) — அஞ்சாவது சொன்ன—சு (ம்) மாற — (சய) (இது தப்பு) ∴ (யஅ), [முதலாவதும் மூனுவதுமான ரு-ம் — அ-ம் மாற] =(ரு × அ = சய); (நடுவில் விடப்பட்ட திவ்வள வாகுமென்பது குறிப் பிங்கு) :—

இதுடனே — ச-ஆவது — ௩யஉ-ள — எ = ? மீ (சு ப்) ஆன — ௩யகஇ — யுமாற ௲உாசுய ($31\frac{1}{2} \times 40 = 1260$) யிதை முன்னிருத்தின—யஅ-ரு கிய்ய யீய்வு =எய-ள ($\frac{1260}{18} = 70$-ள) என்பது:—

யசு — டிக்கோலால் மீ நிலம் — ப-ரு — (   ) கடமை-சய (பணம்) ஆ யஉ — டிக் கோலால் — மீ நிலம் — ப-ரு — கடமை பணம் யெத்தனை யென்றால்:—

யசு - ரு - யஉ யிய - யிய்வு-ஹு (முக்கா)-தன்னைமாற-இய - இதைக் கடமை-சய-ல் மாற:—

$40 \times \frac{5}{8} = 22\frac{1}{2}$ ப—) = உயஉஇ. ஆதலால்-ஷை- 2 — $2\frac{1}{2}$ உஇ -யென்பது:—

எஉ க்காலால் - ௱.ள - (100 - ள) - அஉ க்காலரல் நெல் யெத்தனை யென்னில்:—

இதற்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

எ. (ம). ௱ - (ம்) மாற - எ௱ - ($7 \times 100 = 700$). இதை அ-உக்காலில் களிக்க- அயஎ இ ($\frac{700}{8} = 87\frac{1}{2}$) ஆதலால் - அயஎ - ள், த. ஹு-ச.உ ($87\frac{1}{2}$ள = 87ள- தூணி பதக்கு - 4உ)யென்பது:—

(൰௨) டிக்கோலால் குழி-ள-ல் ൰ரு - டிக்கோலால் குழி தெத்தனை யென்னில்:—

இதுக்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

பின்-൰கூ-ரு - ൰௨. ருக்கிய யிப்வு - ஓ = ($\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$) முக்கால் - யிதைத் தன்னை மாற - இய - (இதை) குழி யாகிய - ரா - நூறில் - மாற - ருமகூவ :—

இதற்கு வேறு வழிப்படியும்விடை.

இனத்தை இனத்தால் பெருக்கு இனத்தால் வகு என்பதின்படி நடத்த:—

கோல்களையே குழி செய்ய வந்ததால் பெருக்கி வகுக்க:—

நிலக்குழி 100ஐ $[(100) \times (\frac{12}{16})^2] = (100 \times \frac{144}{256})$

$$\left[(100) \times \left(\frac{16 \times 9 = 144}{16 \times 16 = 256}\right) \times \therefore \frac{9}{16}\right]$$

$(100 \times \frac{9}{16} = \frac{900}{16} = 56\frac{1}{4}) =$ குழி **$56\frac{1}{4}$** (முன் போல்)

என்பது:—

யிப்படிச் செவ்வையாய் வந்தால் கருச்சுத்தானம் பார்த்துச் சொல்லவும் — செவ்வைபாய் வருதே போனால் - பெருக்கிச் சொல்லவும்:—

൰கூ - டிக்கோலால் குழி - சா - (ம்) கண்டதொரு கோலாலளக்க (குழி) ரா-அளந்த கோலுக்கடி யெத்தனை யென்னில்:—

யிதுக்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

சா - ம் முதல் - ௨൰. ரு - ௨൰ரு - சா - ஆதலால்:—

௨൰ - ரும் - ௨൰ -.

(பின்பு) ரா. யும் மூலப்படுத்த.

൰. ரு - ൰: ரா-, ஆதலால் - ൰, ரு - ௨൰. சயயிய்வு = ௨ - மூன் - ൰கூ - ல்மாற - ௬൰௨:

[இதற்கும் முன் போல் த்றை ருசிக (வர்க்க) கணிதப்படிக்கு:—

இங்கு (கோல் வர்க்க) $= \frac{400}{100} (16)^2 = 256 \times \frac{400}{100} = 256 \times 4 = 1024.$

$\therefore$ 1024ன் $= 32 \times 32 \therefore$ இதற்கு மூலம் $= 32.$

$\therefore$ 100 குழியாக அளந்த கோல் நீளம் $= 32$ அடியென்பது:—

[குறிப்பு:— நிலக்குழி சொச்சத்தில் வந்தாலும் மேலே தனியாக என்னால் காட்டப்பட்ட வழிகள், கோலுக்குஞ் சேர்ந்து கணிதத்தில் நன்றாக உபயோகமாகும் — என்பதாம்]:—

செவ்வையாய் வந்தால் யிப்படிப் பார்க்கவும் - யில்லாத போனால் தானத்துப் படியே பார்த்துப் பெருக்கிச் சொல்லவும்:—

(ஸ்தானத்துப்படிப் பார்த்துச் சொல்லுமிவர்கள் வழி முன்னே விரிவாக விளக்கப் பட்டிருக்கிறது – ஆனபோதிலு மிப்படிப் பார்ப்பது மிக்கக் கடினமே யாகுமென்பதுணர்க) :—

வினு விளக்க(ங்கள்)ம்—

(ச)ல் பெருக்குவந்தால் (வ) வாயில் பார்க்கிறது— (1)

(அ)ல் பெருக்கு வந்தால் (ஒ) வாயில் பார்க்கிறது (2)

(யிசா)ல் ௸ (ய) ௸ (3)

(௩யிஉ)ல் பெருக்க வந்தால் (ய) வாயில் களித்த துகையைப் பாதி செய்துச் சொல்லவும். (4)

(சாயிச)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் களித்த துகையைக் கால்வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (5)

(ாஉயிஅ)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் களித்துக் கண்டதை (ஒ) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (6)

(உாருயிசா)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் களித்துத்திரும்ப (ய) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (7)

யிடை வெளித்தானம்:—

(ரு) பெருக்கு வந்தால் - (சப) வாயில் களித்துச் சொல்லவும். (8)

(ய) பெருக்கு வந்தால் (ஜ) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (9)

(உய) பெருக்கு வந்தால் (ப) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (10)

(சய) பெருக்கு வந்தால் (சு) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (11)

(அய) பெருக்கு வந்தால் (ரு) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (12)

(ாசாய) பெருக்கு வந்தால் (ഥ) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (13)

(௩ாஉய) பெருக்கு வந்தால் (வத = முந்திரி) வாயில் களித்துச்சொல்லவும் (14)

மத்தும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்:-

(இன்னும் சில விசேஷ) ௸க்குத் தொடர்ச்சி) குறிப்புகளிங்கு:—

ச. ரு. வ	4 க்கு ($\frac{1}{4}$)
அ. ரு. ஒ,	8 க்கு ($\frac{1}{8}$)
யிசா. ரு. ய,	16 க்கு ($\frac{1}{16}$)
௩யிஉ. ரு. ஸு,	32 க்கு ($\frac{1}{32}$)
சாயிச. ரு. உவத,	64 க்கு ($\frac{1}{80}+\frac{1}{320}$) = ($\frac{1}{64}$)
ாஉயிஅ. ரு. ഥக்ஷ இ.	128 க்கு ($\frac{1}{160}+\frac{1}{640}$) = ($\frac{1}{128}$)
உாருயிசா. ரு. வதக்ஷ வ,	256 க்கு ($\frac{1}{320}+\frac{1}{1280}$) = ($\frac{1}{256}$)
இப்படிப் பார்த்துங்கொள்ளவும்	512 க்கு = ($\frac{1}{640}+\frac{1}{2560}$) =(1/512)

ப —(பணம்) இ ஒு நெல்படி - ரு இ ஒு. ஆ ப — ரு இ ஒு ரு நெல்சொல்வது

[நடுவு ரு இ ஒு - யும், கடசி ரு இ ஒு - யும் மாற - ரு ம க இ ஒு ருவது -
இது முதலாகிய(தை) - இ ஒு—பேருக்குக் குடுக்க யீய்வு - ரு ம இ ஒு =]

(குறிப்பு:- இ ஒு $= \frac{5}{8}$. ரு இ ஒு $= 5\frac{5}{8} = \frac{45}{8}$)
$\therefore (\frac{45}{8} \times \frac{45}{8} \div \frac{5}{8} = \frac{2025}{64} \times \frac{8}{5} = \frac{405}{8} = 50\frac{5}{8})$] யென்பது.

மீ - ம - ரு - ஷ - சம — ப — ஆ - மரு ப — சூம்வது-உரி ரு-யெத்தனை யென்னில்:- மருதுநா - யும் - சமல் - மாற கமரு - ப — எஇ - யென்று திருத்தி கீள - சமல் மாற ரும—ரும யும் - ய — வாயில் களிக்க - கதஒு - ஆதலால் முன்னிருத்தின துகையுடனே கூட்ட - கமரு ப — கூவஒு.

[குறிப்பு:- மேற் சொன்ன மரு ப — சூம்வது - என்பது மருதுநா—சூம்வது - என்றிருக்க வேணும். இவ்விதமிருந்தால் தான் கீழ் சொன்னவிடை - கமரு - கூவஒு ருச்சரி வருகின்றது:—

விவரணம்:-

$(40 \times 15\frac{15}{16} + \frac{3}{80} \times 40 + \frac{1}{160} \times 40 + \frac{1}{320} \times 40)$,
$(\frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = \frac{3}{64})(40) = (\frac{120}{64} = 1\frac{7}{8})$ என்று திருத்தி
$15\frac{15}{16} \times 40 = 63\frac{12}{16}$.
இங்கு $16 = 10$, $\therefore 12 = 7\frac{1}{2}$ $\therefore$ 63 ப— $7\frac{1}{2}$.
இந்த 63 ப— $7\frac{1}{2}$ யுடன் முன்னிருத்தின $1\frac{7}{8}$ ப—வும் கூட்ட (63 ப—$7\frac{1}{2}$ + ப— $1\frac{7}{8}$).

= 63 ப — $9\frac{3}{8}$ என்பது சரியான விடையாக வருகிறது கவனிக்கவும்.
ஆகையால் இங்கு - (மருதுநா—சூம்வது) (சரி) = (கமரு ப — கூவஒு)
$= 40\,(15 + \frac{12}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 15\frac{315}{320})$,
$= (40 \times 15 + \frac{315}{320} \times 40)$
$=(600) + (\frac{315}{8} = 39\frac{3}{8}) = 639\frac{3}{8}$

இதை

10ல் வகுக்க $(639\frac{3}{8} \times \frac{1}{10})$

=63 ப—$9\frac{3}{8}$ இதற்குச் சரியாகத் தமிழ் லக்கப்படிக்கு - கமரு ப - கூவஒு] யென்பது:—

(வேறு):

- சாண் சுத்தில் - ம மூல நிலத்தில் - மரம் - கரு வில் ஷ க — ஆ-
ரு - சாண் சுத்தில் - மரு - மூல நிலத்தில் மரம் - மரு - ரு வில் யெத்தனை யென்னில் :—

முதல் - ௪ - ந்தன்ஞல்வாற - ௰௬ - இதை மூளம் - ௰-ல் மாற - ௱௬௰ - யிதை நிருத்தி பின் - ௫-ம் தன்னில் மாற ௨௰௫ - இதை மூளம் - ௰௫ல் மாற - ௯௱௭௰௫ யிதை - ௰ - உடனே மாற - ௯௲௱௫௰ - இதை முன்னிருத்தின ௱௬௰ — ருக் குடுக்க யிய்வு - ௨௰௯வாறு :—

$$= \left\{ \left(\frac{5 \times 5 \times 15 \times 10}{4 \times 4 \times 10} \right) = \left(\frac{3750}{160} \right) = \left(23\tfrac{7}{16} \right) \right\},$$

இங்கு ஷை $\frac{7}{16}$ ஐ 10ல் பெருக்க — $4\frac{3}{8} = (\frac{70}{16} = 4\frac{6}{16}) \times$ (23 ப — $4\frac{3}{8}$) ஆதலால் ஷை உ௰௩ ப — சவஓ என்பது :—

இம்பி (மி) ரு வகை :—

ஷு ரு ஷு - கீழ் ஷு ரு இம்மி - ௰இ ; இம்மி - ஷு ரு நுட்பம் ௩இ - நுட்பம் - ஷு - ரு அதி நுட்பம் - ௭இ ; அதிநுட்பம் ஷு ரு திடப்பம் ௰௫ - திடபம் ஷு ரு அதிடபம் ௨௰௨இ அதிடபம் — ஷு - ரு - அற்பம் ௪இ - அற்பம் ஷு ரு அதற்பம் ௪௰௫; அதற்பம் ஷு ரு சாரம்—௰௧—ஆக கீள்தானம் யிந்தப்படி பார்க்கவும்

இதற்கு விவரணம் :—

(ஷு) முந்திரி என்பது $\frac{1}{320}$; இந்த முந்திரிக்கு முந்திரி கீழ் முந்திரி $= (\frac{1}{320} \times \frac{1}{320}) = \frac{1}{102400}$.

இப்படி வந்த இந்த கீழ் முந்திரிக்கு ($\frac{1}{102400}$ரு) இம்மி $10\frac{1}{2}$ பத்தரை

இம்மி முந்திரிக்கு நுட்பம் $3\frac{1}{2}$ (மூன்றறை)

நுட்ப்ப முந்திரிக்கு அதி நுட்ப்பம் $7\frac{1}{2}$ (ஏழறை).

அதி நுட்ப்ப முந்திரிக்கு திட்ப்பம் 15 (பதினைந்து).

திட்ப்பம் முந்திரிக்கு அதிடப்பம் $22\frac{1}{2}$ (இருபத்திரண்டறை).

அதிட்பம் முந்திரிக்கு அற்பம் $4\frac{1}{2}$ (நாலறை)

அற்பமுந்திரிக்கு அதற்பம் 45 (நாற்பத்தைந்து)

அதற்ப முந்திரிக்கு சாரம் 11 (பதினொன்று).

அதன்கீழ் தானம் இந்தப் படிபார்க்கவும்.

இன்னும் விவரண மிங்கு :—

பகுப்பளவைக்கு :—

ஒன்று (1) க்கு முந்திரி (320).

ஒன்று (1) க்குக் கீழ் முந்திரி — (102400) இந்தக்

கீழ் முந்திரி ஒன்று (1) க்கு :—

இம்மிமுந்திரிகள் = 3360.

நுட்ப முந்திதிகள் = (3360 × 1120) = 3763200.

அதிநுட்ப முந்திரிகள் = (3763200 × 2400) = 9031680000.

திடப்பமுந்திரிகள் = (9031680000 × 4800) = 43352064000000.

அதிடப்பமுந்திரிகள் = 43352064000000 × 7200)
= 312134860800000000.

அற்பமுந்திரிகள் = (312134860800000000 × 1440)
= 449474199552000000000.

அதற்பமுந்திரிகள் = (449474199552000000000 × 14400)
= 6472428473548800000000000.

ஸாரங்கள் = { 6472428473548800000000000 × 11) = (71196713209036800000000000) } ஆ புள்ளிகள் = 26

ஆகையாலிந்த ஒன்றுக்குச் சாரங்கள் (1 ருச் சாரங்கள்)

= (71196713209036800000000000 × 102400) ∴

= 7290543432605368320000000000000.

ஆகப் புள்ளிகளிகள் (ஆகஸ்த்தானகள்) = **31** ஆகும்.

ஆகக் கீள்தானம் யிந்தப்படிப் பார்க்கவும்.

ஸ்ரீ ராமற்துணை ஸ்ரீறு செய்யும் குருவே துணை.

—: கடவுள் துதி (வாழ்த்தல்):—

ஆக்கலால் பிரமனென்றும் காத்தலால் விஷ்ணு வென்றும்
அழித்தலா லீசனென்று மாகிய மூலப்பொருளே
அனுக்ஷணம் மனதில் நிற்பாய் அழிவிலாத் தானங்கொடுத்துச்
சடுதியில் காற்றிடாய் நீ கடவுளே நின்பதங்கள்
நானென்ற வகமொழிந்தேன் கடுகவே அனந்தம் போற்றிப்
படிப்பவர் பார்ப்போர் கேழ்ப்போ ரனைவரும் வாழி வாழி.

ஈசன் துணை ஈசன் ரக்ஷிக்குக சுபம் சுபம் சுபம்

முற்றும்.

ஸ்ரீ :

பிழை திருத்தம் விடுபட்டவை

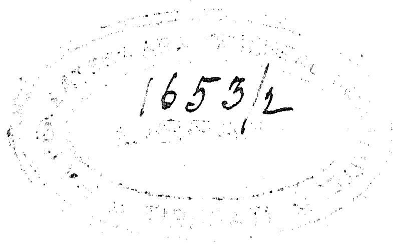
பக்கம்	வரி	தப்பு	சரி
11	24	ஙூ — ல	ப
25	10	கூ	சு
61	9	(87ம் 88ம்)	(59 ம்)

55ம் பக்கம் வரி 9ல் உள்ள—" பரிதி'''—(இதற்குமேல்)

"விபுத (33) நேத்ர (2) கஜாஹி (88) ஹூதாசந (3) த்ரிதச (33) வேத (4) ப (27) வாரண (8). பாஹவ : (2)–நவநிகர்வ (90000000000) மிதேவ்ருதி விஸ்தரே பரிதிமாநமிதம்–ஜகுர்ப்புதா:" . . . .

என்கிறபத்யத்தினை —(கற்றவளவைச்)—என்று படிக்கவேண்டியதாகும்.

—:o:—



PRINTED AT SOLAR WORKS,
12, THAMBU CHETTY STREET,
MADRAS-1.